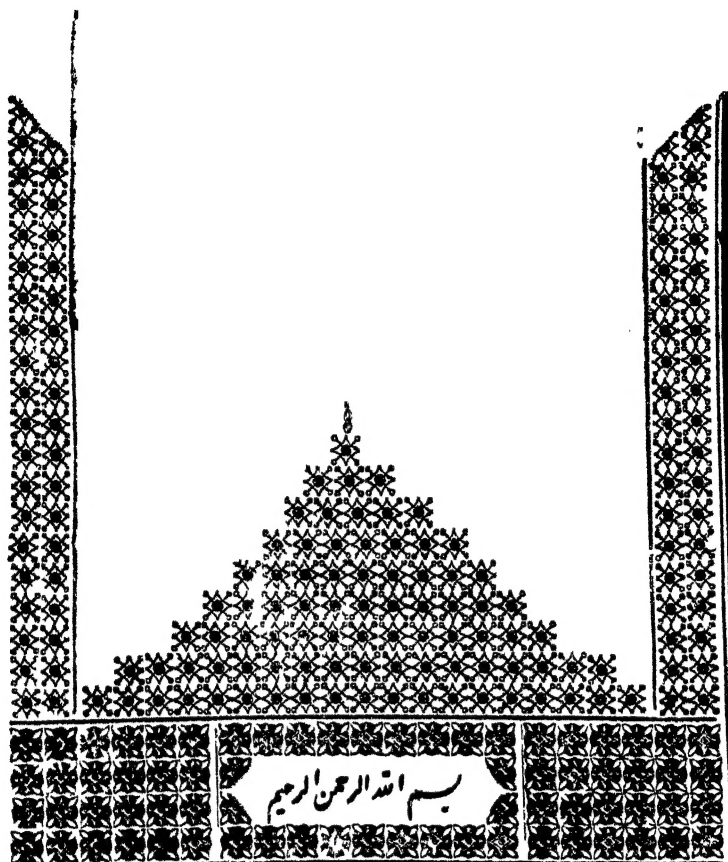


5/1/9

1

X



الحمد لله الذي اخترع الاشياء في غاية الاحكام * وبهر العقول بما فيها من بدائع
الانتظام * ألم تر الى السماء كيف بناها * رفع سمكها بلا عمد فسواها * واغطى
ليلها واخرج ضياءها * والارض بعد ذلك ادحاها * انخرج منها ماؤها ومرعاها *
والجبال ارساها * ان في ذلك لآيات لا يرى الا بالابصار * وارشادنا عن ابل الخطا
الى نهج الصواب * والصلاة والسلام على منبوع ينابيع الحكمة والكمال *
ومسقط نقطة قلم الرسالة والجلال * مركز دائرة الوجود * ومطلع شمس النور
والجلود * سيدنا محمد الذي بعث في اشكال القضاة رحمة للعالمين * وتلى آله
الذين تنزه جوهر عنصرهم عن عرض يشين * (أما بعد) فيقول العاقل بره من كل
وصفه * المعتمد عليه في جميع شؤنه محمد عصفه * انه لما صدر الامر الواجب
الامتثال * من سدة صاحب السعادة والاقبال * سبق الله في ارضه * القائم
له بسنته وفرضه * رئيس رؤساء العساكر بطهاده * وطرار العصابة الحمدية *

حضرة الجناب الاكرم * والوزير الانعم * الحاج ابراهيم باشا صاحب الفتوحات *
والنصر الذي لم يزل منشور الرايات * سلالة الجناب المعظم * والخديوى الاعظم *
الذى ادنى مناقبه اخرس البلغاء من مقال * وان حسن في ذلك قول
من قال

ماذا أقول وكيف القول في ملك * قد فاق كل ملوك الاعصر الاول
محمدات ان احمدك مبتلا * وان طابت لك العليا أتت على
كيف لا وقد تغنت بدمه الورق على اغصان الايبك * وكان ذلك الامر
صادرا الى حضرة أمير اللواء ادهم بك * حبر العلوم الرياضية * ومدير عموم
المهمات الحربية * وهو كرم واثرا فلاك الصناعات العلمية والعملية * ومضمون
ذلك الامر انه يترجم كتاب اصول الهندسة * الجامع لمختص ما وضعه ~~كل~~
مهندس من القدماء وأسس * الذى ألّفه فيلسوف زمانه * وفريد نظرائه
واقرائه * المهندس لثاندرا المشهور باراضى فرانسوا وان تكون ترجمته من اللغة
الفرنساوية * الى اللغة التركية * وذلك لما اشغل عليه من كثرة المعانى * وقلة
الانفاظ والمباني * مع ما اختص به من حسن الترتيب * وسهولة الادلّوب الغريب
وان ينتخب تعليمه اثني عشر فخريرا من اوردى الرجال * يكون ثاقب فكريهم
في غاية الجودة والكمال * فبادر حضرة البيك الموحى اليه بامتثال ذلك الامر
وسارع الى انتخاب الجماعة موافقين لعدة الشهور في القدر * وشرع في الترجمة
والتعليم * وتحقيق معنى ذلك الكتاب على طريق مستقيم * وكنت ممن
انتظم في سلك أولئك الجماعة * وحصل كل مغا على قدر ما له من البراهة * ثم أمر
حضرة المشار اليه ان يترجم من اللغة التركية * الى اللغة العربية * ليعم نفعه جميع
الانام * ويكون زيادة في قوة الاسلام * وكنت بحمد الله اتقنت دراسته غاية
الانتقان * بما أوضحه حضرة البين المشار اليه من بديع البيان * لاني حالة
التعليم جعلت آداني صافا لا لى كلمة * وقلبي وعاء لا لقطا الدمن فيه * فبادرت
الى ترجمته كما أمر * مستعينا بخالق القوى والقدر * وهذا أو ان الشروع في
الحرام * ونسأل الله حسن الختام *

(مقدمة)

هذا الكتاب يشتمل على ثمان مقالات الارباع الاوليات منها يبحث فيها عن الاشكال المسطحة والخطوط المرسومة على السطوح المستوية والمقالة الاولى لها ملحقات اخذت من اصول المهندس لاقوروا وهو من اشهر مهندسي فرنسا لكونها سهلة على المبتدى واندرجت عنها وسيت ملحقات المقالة الاولى والمقالة الثانية يبحث فيها عن تعريف الدوائر ومقادير الزوايا والمقالة الثالثة يبحث فيها عن المثلثات المتشابهة وبذكر في حدودها بعض خصائص النسبة والتناسب وبذكر أيضا في بعض نتائج دها واهام من علم الجبر والمقابلة ما يدل على ان برهان الهندسة قطعي والمقالة الرابعة يبحث فيها عن مساحة الاشكال المنتظمة والدوائر وما يليها والمقالة الخامسة يبحث فيها عن السطوح المستوية والزوايا المجسمة والمقالة السادسة يبحث فيها عن الاجسام المحاطة بسطوح مستوية والمقالة السابعة يبحث فيها عن المثلثات الكروية وما يخصها من التفاصيل والمقالة الثامنة يبحث فيها عن الاجسام المحاطة بسطوح منحنية ولكل من الثمان مقالات دعاوى عمالية مثبتة بواسطة الدعاوى النظرية فبعض الدعاوى العملية يأتي مستقلا عقب مقالاته وبعضها مندرج في مقالاته ومن اجل اشتمال هذه الاصول على البراهين القطعية الممدة للذهان كان كل طالب علم في تلك الديار واجبا عليه ان يطلع عليها لما فيها من نوسعة مبادئ الفهم وتدريبها على ادراك اسرار معاني الكلام ونقوية العقول وتصفية الافكار وجودة

يقول الفقيه على
بافندي عزت في
هذه الطبعة الثالثة
قد حذفت ملحقات
المقالة الاولى ونصفها
الاخير وجعلت
بديلهما النصف الاخير
من المقالة الاولى
من كتاب المهندس
بالقسي لكونها سهلة
جدا على المبتدى

القرائح ودقة الانتظار حتى ان أهل تلك الديار يرون

انها اولى بالقنوه الصبيان ويحافظون

على دراستها يحافظون

على تلاوة

ام القرآن

هذا كتاب النخبة العزبة

في تهذيب الاصول الهندسية

مؤلف أصل هذا الكتاب فيلسوف زمانه وفريد نظرائه وأقرانه من هولندا
حاوي المهندس الشهير جاندرال فرانسوا

وهذه الطبعة الثالثة بأمر سعادتمدير المدارس الملكية والاشغال العمومية
حضرة علي باشا مبارك وتنقيح معلم علم الاستاتيك وعلم الديناميك وعلم
الايدروليك بمدرسة المهندسخانة الخديوية حضرة علي أفندي عزت وتصحيح
شيخ التصحيح بالمطبعة السنية حضرة الشيخ ابراهيم عبد الغفار الدسوقي
طبع بالمطبعة الكبرى ببولاق سنة ١٢٨٨ هجرية على صاحبها أفضل الصلاة
وأزكى التحية

(المقالة الاولى من اصول الهندسة)

﴿ بيان الحدود الاصولية ﴾

١ الهندسة علم يبحث فيه عن مقدار الامتداد اى مساحته والامتداد هو الابعاد الثلاثة وهى الطول والعرض والارتفاع أو العمق

٢ الخط طول بلا عرض ولا عمق وكل من نهائى الخط يسمى نقطة والنقطة لا امتداد لها

٣ الخط المستقيم هو أقرب بعدين النقطتين

٤ كل خط ليس مستقيماً ولا مركباً من خطوط مستقيمة فهو خط منحنى والخط الذى يتركب من خطوط مستقيمة فهو خط منكسر فى (شكل ١) خط ا ب يسمى مستقيماً وخط ا ب د يسمى منكسراً وخط ا ب د هـ يسمى منحنياً

٥ السطح ماله طول وعرض فقط

٦ السطح المستوى هو السطح الذى يمكن ان ينطبق عليه خط مستقيم فى أى جهة من جهاته انطباقاً تاماً

٧ كل سطح ليس مستوياً ولا مركباً من سطوح مستوية فهو سطح منحنى

٨ الجسم ماله ابعاد ثلاثة الطول والعرض والعمق

٩ (شكل ٢) الزاوية هى الانفراج الحاصل من تلاقي خطين مستقيمين

الانفراج مثلاً الذى بين خطى ا ب و ا ج يسمى زاوية ونقطة ا التى هى ملتقى الخطين تسمى رأس الزاوية وخطا ا ب و ا ج يسميان ضلعها الزاوية

الزاوية تارة تذكّر بحرف ا وحده وهو الذى عند رأسها وتارة تذكّر بثلاثة حروف بحيث يكون الحرف الذى يذكّر متوسطاً والاعلى رأس الزاوية مثل س ا ج و ا ب

الزوايا تقبل الجمع والطرح والضرب والقسمة كسائر المقادير مثلاً زاوية د هـ هى مجموع زاويتي د حـ و حـ هـ وزاوية د حـ هى

فاضل زوايق $د ه و$ $د ه$ (شكل ٢٠)
 ١٠ اذا تساوت زاويتا $ا ب و$ $ا د و$ المتجاورتان الحادثتان
 بجانبى خط $ا ب$ المتلاقى بخط $د ه$ فكل واحدة من هاتين الزاويتين
 تسمى قائمة ويقال ان خط $ا ب$ عمود على $د ه$ (شكل ٣)

١١ الزاوية الحادة ما كانت أصغر من القائمة فهو زاوية $ث ا د$
 والمنفرجة ما كانت أكبر من القائمة فهو زاوية $د ه و$ (شكل ٤)
 ١٢ الخطان المتوازيان خطان في مستوا واحد لا يلتقيان أصلاً اذا امتدّا مثل
 خطى $ا ب و د ه$ (شكل ٥)

١٣ الشكل المستوي هو سطح مستو محيطت جميع أطرافه بخطوط
 فان كانت تلك الخطوط مستقيمة يسمى ذلك الشكل شكلاً مستقيماً الاضلاع
 أو مضلعاً مستوياً وتسمى تلك الخطوط محيط الشكل أو أضلاع الشكل (شكل ٦)
 ١٤ أبسط الاشكال المستقيمة الاضلاع ما كان ذا ثلاثة أضلاع ويسمى مثلثاً
 وان كان للشكل المستقيم الاضلاع أربعة أضلاع يسمى ذا أربعة أضلاع وان
 كانت أضلاعه أكثر من أربعة يسمى كثيراً الاضلاع فان كان كثيراً الاضلاع
 ذا خمسة أضلاع يسمى خمسا وان كان ذا ستة يسمى سدسا وان كان ذا سبعة
 يسمى سبعا وهكذا الخ

١٥ المثلث يسمى متساوياً الاضلاع اذا تساوت أضلاعه الثلاثة (شكل ٧)
 ومتساوياً الساقين اذا تساوى ضلعا فقط (شكل ٨) ومختلف الاضلاع
 اذا اختلفت أضلاعه الثلاثة (شكل ٩)

١٦ المثلث يسمى قائم الزاوية اذا كانت إحدى زواياه قائمة والضلع الذى
 يقابل تلك القائمة يسمى وتر القائمة فلذا مثلث $ا ب د$ الذى زاوية $ا$ قائمة
 يسمى مثلثاً قائم الزاوية وضلع $ب د$ وتر القائمة (شكل ١٠)

١٧ انذ كر انواع الشكل المسمى ذا أربعة أضلاع فنقول
 منه المربع وهو ما كانت جميع أضلاعه متساوية وزواياه قائمة (شكل ١١)
 ومنه المستطيل وهو ما كانت أضلاعه المتجاورة مختلفة وكانت جميع زواياه

قائمة (شكل ١٢)

ومنه المتوازي الاضلاع وهو ما كانت أضلاعه المتقابلة متوازية (شكل ١٣)
ومنه المعين وهو ما كانت أضلاعه متساوية بدون ان تكون زواياه قائمة
(شكل ١٤)

ومنه شبه المنحرف وهو ما كان فيه ضلعان متوازيان فقط (شكل ١٥)
١٨ الخط المستقيم الموصول بين زاويتي ذى أربعة أضلاع أو كثير الاضلاع
دون المتجاورة بين يسمى قطر الشكل مثلا خط ١ هو قطر (شكل ٤٢)
١٩ كل شكل مستقيم الاضلاع اذا تساوت أضلاعه يسمى متساوي الاضلاع
ويسمى متساوي الزوايا اذا تساوت زواياه

٢٠ الشكلان المستقيمان الاضلاع يسميان متساويي الاضلاع المتناظرة اذا
تساوت أضلاعهما المتناظرة وكان كل منهما على نظم واحد يعنى اذا كان
الضلع الاول من أحدهما مساويا للاول من الآخر والثاني للثاني والثالث للثالث
وهكذا الخ ويسميان متساويي الزوايا المتناظرة اذا تساوت فيهما الزوايا المتناظرة
كالاضلاع وبهذين الوجهين تسمى الاضلاع المتساوية أضلاعا متناظرة
والزوايا المتساوية تسمى زوايا متناظرة

(تنبيه) الاربع المقالات الاول يبحث فيها عن الاشكال المستطعة والمخطوط
المرسومة على السطح المستوي

بيان الاصطلاحات والعلامات المشتمل عليها هذه الاصول

العلوم البديهية هي القضايا التي تكون بينة بنفسها أى لا يحتاج الى اثبات

الدعوى النظرية هي القضية المسلمة بواسطة البرهان

الدعوى العملية هي المسئلة التي يراد حلها بالعمل

القائدة هي القضية المعينة على اثبات دعوة نظرية أو مسئلة

القضية اسم يطلق على الدعوى النظرية والعملية والقائدة

النتيجة هي الثمرة التي تظهر من قضية أو جملة قضايا تقدمت

التبعية ما يفهم منه فائدة الدعوى التي تقدمت وارتباطها بغيرها وغايتها
القروض هي الموضوعات التي تفرض في تقرير قضية أو في أثناء برهان

العلامات

هذه العلامة = تسمى علامة التساوي فكتابة $a = b$ معناها a تساوي b
ولبيان ان مقدار a أصغر من مقدار b يكتب $a < b$ - وليبان ان a أكبر
من b يكتب $a > b$ -

وهذه $+$ العلامة تسمى علامة الزائد وتدل على الجمع وهذه الإشارة - تسمى
علامة الناقص وتدل على الطرح فكتابة $a + b$ - تدل على حاصل جمع كتيبي a و
 b وكتابة $a - b$ - تدل على فرقهما أي على الباقي من طرح الكمية b من
الكمية a وكتابة $a \div b$ - أو $a \div b$ - تدل على انه ينبغي
جمع a و b ثم طرح b من حاصل جمعهما

وهذه \times العلامة تدل على الضرب فلذا $a \times b$ - يشير الى حاصل ضرب
مقدار a في مقدار b - وقد استعمل بعضهم نقطة عوضا عن تلك العلامة فهو
 $a \cdot b$ - يعني $a \times b$ - وقد توضع $a - b$ بدون علامة الضرب وبدون
نقطة بالاتصال فتدل على الضرب مثل $a - b$ يعني $a \times b$ -
وحينئذ لم يعن به الحرفان a و b على نهائيتي خط كما يقال خط $a - b$ وأيضا
هذه الجملة أعني $a \times (b + c - d)$ تدل على حاصل ضرب مقداره a
في الكمية المركبة التي هي $b + c - d$ وهذه الجملة أعني
 $(a + b - c) \times (d - e + f)$ إشارة الى ضرب مقدار الكمية
 $a + b - c$ في كمية $d - e + f$

ما يكتب بين قوستين هكذا () قليل لا كان أو كثيرا يعتبر مقدارا واحدا
وإذا وضع عدد على يمين خط أو $\sqrt{\quad}$ دل على ضرب ذلك الخط أو الكمية في ذلك
العدد الموضوع مثلا $3a$ - إشارة الى أخذ ثلاثة أمثال خط
 a - و $\frac{1}{2}a$ يدل على أخذ نصف زاوية a وهذه $\frac{1}{2}$ إشارة

الى تعيين مربع خط a و $\frac{3}{1}$ أيضا تدل على تعيين مكعب خط
 a ومعاني التريع والتكعيب تذكر تفصيلا في عملها
وهذه γ علامة تدل على الجذر فلذا γ بدل على جذر مربع
عدد 2 وايضا γ $a \times$ يدل على جذر حاصل $a \times$ أو إشارة
الى استخراج الوسط المناسب الهندسي بين مقدارى a و b

(القضايا البديهية)

- ١ يتساوى المقداران اذا كان كل واحد منهما مساويا للمقدار الواحد
- ٢ الكل أعظم من جزئه
- ٣ الكل يساوى مجموع أجزائه
- ٤ لا يمكن وصل خطين مستقيمين بين نقطتين
- ٥ المقداران يساويان اذا كانا متساويين اذا لم يكن انطباق أحدهما على الآخر
انطباقا تاما سواء كان هذان المقداران خطين أو سطحيين أو جسميين

الدعوى الاولى النظرية

الزوايا القائمة كلها متساوية (شكل ١٦)

مثلا اذا كان خط h المستقيم عمودا على خط a وخط r عمودا
على h وتكون زاويتا a و h قائمتين متساويتين لانه
لو أخذت الابعاد الاربعة متساوية وهى a و h و r و h
ليكن بعيد a مساويا لبعده h ومن هذا يمكن وضع خط h و على
خط a بأن تكون نقطة h على نقطة a ونقطة r على نقطة a
وحيث ان يكون الخطان المذكوران منطبقين والا لكان يمكن ان يوجد خطان
مستقيمان بين نقطتي a و h وهذا خلاف (بديهية ٤) وتكون نقطة r التى
هى وسط خط h و منطبقه على نقطة h التى هى وسط خط a و من
هذا يكون خط h و منطبقا على خط a وأيضا ينطبق ضلع r و

على \angle فان قيل لم ينطبق ضلع $ر ح$ على \angle بل يكون خارجا عنه
 باستقامة \angle ط أجيب بأنه لو كان ضلع $ر ح$ واقعا على \angle ط لكان
 يلزم أن تكون زاوية $ا ح ط$ مساوية لزاوية $ط ح ر$ لانهما عين زاويتي
 $ه ر ح$ و $ر و ح$ والمتساويتين ولكن زاوية $ا ح ط$ أكبر من زاوية $ا ح ر$
 أو مما سواها وهي زاوية \angle ح ر وأيضاً زاوية \angle ح ر أكبر من زاوية
 $ط ح ر$ فلذا تكون زاوية $ا ح ط$ أكبر من زاوية $ط ح ر$ فيقتضى
 أن تكون زاويتا $ا ح ط$ و $ط ح ر$ متساويتين وغير متساويتين
 وهذا خلف

فيلزم أن يقع ضلع $ر ح$ على \angle وتنطبق زاوية $ا ح ر$ على زاوية $ه ر ح$
 ويثبت تساوى كل الزوايا القائمة ببعضها (بديهية ٥) وهذا ما أردنا اثباته

الدعوى ب النظرية

مجموع زاويتي $ا ح ر$ و $ط ح ر$ المتجاورتين الحادتين بجانبى خط \angle
 المستقيم المتلاقى بخط $ا ب$ يكون مساويا للقائمتين (شكل ١٧)
 لانه لو جعل خط \angle ه عمودا على خط $ا ب$ فى نقطة \angle لكانت زاوية
 $ا ح ر$ مجموع زاويتي $ا ح ه$ و $ه ح ر$ ومن هذا يكون $ا ح ر +$
 $ر ح ا = ر ا ح + ح ا ر + ر ح ر$ لكن زاوية $ا ح ه$
 قائمة ومجموع زاويتي $ه ح ر$ و $ر ح ر$ هو زاوية $ر ح ا$ القائمة الاخرى
 فلذا لزم أن يكون مجموع زاويتي $ا ح ر$ و $ط ح ر$ مساويا لقائمتين وهذا
 ما أردنا اثباته

(نتيجة ١) زاويتا $ا ح ر$ و $ط ح ر$ المتجاورتان اذا كانت احدهما
 قائمة تكون الاخرى قائمة

(نتيجة ٢) (شكل ١٨) اذا كان خط \angle ه عمودا على $ا ب$ كذلك يكون
 خط $ا ب$ عمودا على \angle ه لانه من كون \angle ه عمودا على $ا ب$ يلزم أن
 تكون زاوية $ا ح ر$ قائمة ولذا تكون مجاورتها وهي $ا ح ه$ قائمة كفاي

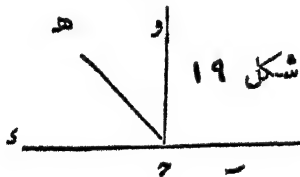
(نتيجة ١) ومن تساوى الزوايا القائمة بينها يكون $\angle د هـ = \angle ح د$ و
 من هذا يكون خط $ا ر$ عمودا على $هـ د$ (١٠)

(نتيجة ٣) (شكل ٣٤) مجموع الزوايا المتعددة المتوالية المنشأة في جانب خط
 $ر و هـ$ $ر ا د$ و $د ا هـ$ و $هـ ا و$ الخ يكون مساويا
 لقائمتين لأن مجموع تلك الزوايا مساو لمجموع زاويتي $ر ا د$ و $ح ا و$
 المجاورتين

الدعوى النظرية

إذا كان الخطان المستقيمان نقطتان مشتركتان يمتدان إذا امتدا ويكونان خطا
 مستقيما واحدا

مثلا (شكل ١٩) إذا كانت النقطتان المشتركتان $ا و$ يمتد الخطان
 فيما بين نقطتي $ا ر$ لأنه لا يمكن وجود خطين مستقيمين بين نقطتي $ا ر$
 (بديهية ٤) فإن قبل إذا امتد الخطان تفرقا في نقطة $د$ بوقوع أحدهما
 في استقامة $د$ والاخر في استقامة $د هـ$ يرسم خط $د و$



بأن تكون زاوية $ا د و$ قائمة $ا د و$ خط مستقيم وخط $د و$ متلاق معه يكون $ا د و$
 $د د =$ قائمتين وأيضاً حيث أن خط $ا د هـ$ مستقيم وخط $د و$ متلاق معه
 يكون $ا د و د هـ =$ قائمتين فيكون $ا د و د = ا د و د$
 و $د هـ$ فإذا طرحت الزاوية $ا د و$ المشتركة من طرفي هذه المتساوية تبقى
 زاوية $د د$ تساوى زاوية $د هـ$ وهو محال لأن زاوية $د د هـ$ حزم من
 زاوية $د د$ والجزء لا يساوى الكل فتبين به - إذا أن كل مستقيمين اشتركا في
 نقطتين يمتدان فيصيران مستقيما واحدا

* (الدعوى ٥ النظرية شكل ٢٠) *

إذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين مساويا لقائمتين كان الضلع الخارج من احداهما على استقامة الضلع الخارج من الاخرى

أى إذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين $\alpha + \beta = 90^\circ$ من الشكل المرفوم مساويا لقائمتين $\angle A + \angle B = 90^\circ$ كان الضلع AB على استقامة الضلع BC لانه لو لم يكن الضلع AB على استقامة الضلع BC لكان على استقامة BC مختلفا فيكون $\alpha + \beta = 90^\circ =$ قائمتين

والمنفروض ان $\alpha + \beta = 90^\circ =$ قائمتين فليزمن ان يكون $\alpha + \beta = 90^\circ =$ $\alpha + \beta = 90^\circ$ وبداية الزاوية المشتركة $\alpha + \beta$ تبقى الزاوية $\gamma = 90^\circ$ وهو محال لان الزاوية γ جزء من الزاوية $\alpha + \beta$ والجزء لا يساوى الكل فثبت بهذا ان الضلع AB على استقامة BC

* (الدعوى ٥ النظرية شكل ٢١) *

إذا تقاطع مستقيمان فالزاويتان المتقابلتان برأسيهما تكونان متساويتين
أى إذا تقاطع مستقيمان مثل AB و CD من الشكل المرفوم فالزاويتان α و β تكونان متساويتين

لانه يلزم من كون الخط AB مستقيما ان يكون $\alpha + \beta = 90^\circ =$ قائمتين ومن كون الخط CD مستقيما ان يكون $\alpha + \beta = 90^\circ =$ قائمتين فيكون

$\alpha + \beta = 90^\circ = \alpha + \beta$ وبطرح الزاوية المشتركة α تبقى الزاوية $\beta = 90^\circ$ مساوية للزاوية $\gamma = 90^\circ$ وهو المطلوب اثباته وبمثل هذا يبرهن على ان الزاوية $\alpha = 90^\circ$ مساوية للزاوية $\beta = 90^\circ$

تبينه (شكل ٢٢)

مجموع الزوايا $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ و $\alpha + \beta = 90^\circ$ و $\gamma + \delta = 90^\circ$ و $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ الحادثة من خطوط مستقيمة متلاقية في نقطة واحدة يساوى أربع قوائم

* (الدعوى ٥ النظرية شكل ٢٣) *

المثلثان يكونان متساويين إذا كان في كل منهما زاوية مساوية لنظيرتها من
الآخر ومنحصرة بين ضلعين كل منهما مساو لنظيره من الآخر

أي إذا كانت الزاوية $ا =$ للزاوية $د$ والضلع $ا -$ = للضلع $د هـ$
والضلع $ا ح =$ للضلع $د و$ يكون المثلث $ا ح د =$ للمثلث $د هـ و$

(برهانه) أنه لو وضع المثلث $ا ح د$ على المثلث $د هـ و$ بحيث ينطبق الضلع
 $ا -$ على مساويه $د هـ$ ولوقت النقطة $ا$ على النقطة $د$ والنقطة $ح$ على
النقطة $هـ$ وحيث أن الزاوية $ا =$ للزاوية $د$ يقع الضلع $ا ح$ على
مساويه $د و$ والنقطة $ح$ على النقطة $و$ فينطبق الضلع $ح د$ على الضلع
 $هـ و$ فينبغي أن ينطبق المثلث $ا ح د$ على المثلث $د هـ و$ فيكونان متساويين
وهذا هو المطلوب

وينتج من هذه النظرية أنه إذا تساوى ضلعان وزاوية بينهما ما من مثلث ضلعين
وزاوية بينهما ما من مثلث آخر كل نظيره تساوت بقية أجزائه بقية أجزائه
الآخر

أي إذا كان الضلع $ا -$ = للضلع $د هـ$ والضلع $ا ح =$ للضلع $د و$
والزاوية $ا =$ للزاوية $د$ تكون الزاوية $ح =$ للزاوية $هـ$ والزاوية
 $د =$ للزاوية $و$ والضلع $ح د =$ للضلع $هـ و$

(الدعوى من النظرية شكل ٢٣)

يتساوى المثلثان إذا تساوى من كل منهما ضلعان والزاويتان المجاورتان له كل
لنظيره

أي إذا كان الضلع $ح د =$ مساويا للضلع $هـ و$ والزاوية $ح د هـ =$ مساوية للزاوية
 $هـ د و$ والزاوية $د ح هـ =$ مساوية للزاوية $و د هـ$ يكون المثلث $ا ح د =$ مساويا للمثلث
 $د هـ و$

(برهانه) أنه لو وضع المثلث $ا ح د$ على المثلث $د هـ و$ بحيث ينطبق الضلع $ح د$
على مساويه $هـ و$ ولوقت النقطة $ح$ على النقطة $هـ$ والنقطة $د$ على النقطة $و$
وحيث أن الزاوية $ح د هـ =$ للزاوية $هـ د و$ يقع الضلع $ا ح$ على الضلع $د هـ$

وتقع النقطة α على احدى نقط الخط $\gamma\delta$ وحيث ان الزاوية $\gamma =$ للزاوية ويقع الضلع $\alpha\delta$ على الضلع $\gamma\delta$ وتقع النقطة α على احدى نقط الخط $\gamma\delta$ فيثبت
تقع النقطة α على النقطة γ بهذا يتطابق المثلث $\alpha\gamma\delta$ على المثلث $\gamma\delta\epsilon$ و
ويساويه وهذا هو المطلوب

نتيجة اذا ساوى ضلع وزاويتان مجاورتان له من مثلث ضلعه وزاويتين مجاورتين له
من مثلث آخر كل نظيره تساوت بقية اجزاء أحدهما بقية اجزاء الآخر \parallel كل
بنظيره أى اذا كان الضلع $\gamma\delta$ مساويا للضلع $\gamma\delta$ والزاوية γ مساوية
للزاوية δ والزاوية γ مساوية للزاوية δ وكانت الزاوية α مساوية للزاوية δ
والضلع $\alpha\delta$ مساويا للضلع $\gamma\delta$ والضلع $\alpha\delta$ مساويا للضلع $\gamma\delta$
(الدعوى ح النظرية شكل ٢٣)

أى ضلع من أى مثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وهو أكبر من فاضلهما
أى ان الضلع $\alpha\delta$ من المثلث $\alpha\gamma\delta$ أصغر من مجموع الضلعين $\alpha\gamma$ و $\gamma\delta$
وأكبر من فاضلهما
(برهان القضية الاولى) أن الخط المستقيم $\alpha\delta$ أصغر من الخط المنكسر $\alpha\gamma\delta$
المار بينهما بقى المستقيم $\alpha\delta$ و

(وبرهان الثانية) أن الضلع $\gamma\delta > \alpha\delta + \alpha\gamma$ فاذا طرح $\alpha\delta$ من كل
من الطرفين بقى $\gamma\delta > \alpha\delta - \alpha\gamma$ أى $\gamma\delta < \alpha\delta - \alpha\gamma$ وهو المطلوب
(الدعوى ط النظرية شكل ٢٤)

اذا أخذت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى نهايتى أحد أضلاعه مستقيمان
فمجموع المستقيمان المذهب كوزين يكون أصغر من مجموع الضلعين الباقيين من
المثلث أى اذا أخذت نقطة مثل δ داخل مثلث مثل $\alpha\gamma\delta$ وتمدتها الى
تهابى الضلع $\gamma\delta$ مستقيمان $\gamma\delta$ و $\delta\epsilon$ كان مجموع الخطين $\gamma\delta$ و
 $\delta\epsilon$ أصغر من مجموع الضلعين $\alpha\gamma$ و $\alpha\delta$
(برهانه) ان يقال لومدأ أحد المستقيمين $\gamma\delta$ على استقامته جهة δ حتى قطع
الضلع $\alpha\delta$ فى نقطة مثل δ لحث مثلث $\alpha\delta\epsilon$ فيه الضلع $\gamma\delta > \alpha\delta +$

ا - أي - هـ + هـ > ا + ا - وحدث أيضا مثلث د هـ فيه
 الضلع د هـ > هـ + هـ د فلو جمعت هذه الاشياء غير المتساوية الاصغر
 للاصغر والا كبر للاكبر فالحاصل - هـ + هـ د + د هـ > ا + ا -
 + هـ د + د هـ فاذا طرح الجزء المشترك هـ من كل من الطرفين بقي
 - هـ + هـ د > ا + ا - د فاذا وضع ا د عوضا عن ا د
 د حدث

- هـ + هـ د > ا + ا - وهو المطلوب

(الدعوى في النظرية شكل كه)

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث آخر وكانت الزاوية التي بين
 ضلعي المثلث الاول أكبر من الزاوية التي بين ضلعي المثلث الثاني يكون الضلع
 الثالث من المثلث الاول أكبر من الضلع الثالث من المثلث الثاني
 أي اذا كان الضلع ا - من المثلث ا - د مساويا للضلع د هـ من المثلث
 د هـ و والضلع ا د مساويا للضلع د و والزاوية - ا د أكبر من الزاوية د
 يكون الضلع - د أكبر من الضلع هـ و

(برهانه) ان يرسم زاوية مثل ا - ح = الزاوية د ويؤخذ ا ح = د و
 ويوصل - ح فيحدث مثلث ا - ح = للمثلث د هـ و لان الضلع ا د =
 د و فرضا والزاوية - ا ح = الزاوية د عملا والضلع ا ح = د و
 كذلك (كفاي النظرية السادسة) فينتج من تساوي المثلثين ان الضلع - ح =
 هـ و فاذا انصفت الزاوية د ا ح بمستقيم ا ن لا يقع هذا المستقيم الا في الزاوية
 - ا د لانها أكبر من الزاوية - ا ح حينئذ اذا وصل - ح يكون المثلث
 ا ح ن مساويا للمثلث ا ن د لان الضلع ا ح = للضلع د ا عملا والزاوية
 ح ا ن = للزاوية د ا ن كذلك والضلع ا ن مشترك (كفاي النظرية السادسة)
 وينتج من تساوي هذين المثلثين ان الضلع ح ن = د ن

ومن المعلوم ان المثلث ح - ن فيه الضلع - ح > - ن + ح ن فاذا أبدل
 الضلع ح ن بالضلع د ن كان - ح > - ن + د ن اكن - ن + د ن

= > - فيكون - ح > - وحيث ان - ح = هـ و يكون هـ و
> - أى - ح < هـ و وهو المطلوب

(تنبيه)

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث اخر وكان الضلع الثالث
من المثلث الاول أكبر من الضلع الثالث من المثلث الثانى تكون الزاوية التى بين
ضلعى المثلث الاول أكبر من الزاوية التى بين ضلعى المثلث الثانى أى اذا كان
الضلع ا - من المثلث ا - ح مساويا للضلع د هـ من المثلث د هـ و والضلع
ا ح مساويا للضلع د و وكان الضلع - ح أكبر من الضلع هـ و تكون
الزاوية - ا ح أكبر من الزاوية هـ د و

(برهانه) ان يقال لو لم تكن الزاوية - ا ح أكبر من الزاوية هـ د ولكانت اما
مساوية لهما أو أصغر منهما فان كانت مساوية لهما الزم ان يكون الضلع - ح مساويا
للضلع هـ و وهذا مخالف للمفروض وان كانت أصغر منها الزم ان يكون الضلع
- ح أصغر من الضلع هـ د وهو أيضا مخالف للمفروض فحيث تكون الزاوية
- ا ح أكبر من الزاوية هـ د وهو المطلوب

(الدعوى يا النظرية شكل ٣٣)

اذا ساوت أضلاع مثلث أضلاع مثلث آخر كل لنظيره كان المثلثان متساويين أى
اذا كان الضلع ا - من المثلث ا - ح = للضلع د هـ من المثلث د هـ و
والضلع ا ح = للضلع د و والضلع - ح = للضلع هـ و يكون المثلث
ا - ح مساويا للمثلث د هـ و

(برهانه) ان يقال يلزم من تساوى الاضلاع المتناظرة ان تساوى الزوايا المتناظرة
أى ان تكون الزاوية ا = للزاوية د والزاوية - ح = للزاوية هـ والزاوية
ح = للزاوية و اذ لو لم تكن الزاوية ا مساوية للزاوية د لكنت اما أكبر
منها أو أصغر منها فان كانت الزاوية ا أكبر من الزاوية د كان الضلع - ح أكبر
من الضلع هـ د وهذا مخالف للمفروض وان كانت الزاوية ا أصغر من الزاوية
د كان الضلع - ح أصغر من الضلع هـ د وهذا أيضا مخالف للمفروض

فتكون الزاوية α مساوية للزاوية γ وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية $\beta =$
 للزاوية δ وأن الزاوية $\gamma =$ للزاوية δ وحيث أن أجزاء المثلث $\alpha - \gamma - \delta$
 مساوية لنظائرها من المثلث $\gamma - \delta - \epsilon$ يكون المثلث $\alpha - \gamma - \delta$ مساويا للمثلث
 $\gamma - \delta - \epsilon$ وهذا هو المطلوب

(تنبيه)

قد ظهر من برهان هذه القضية أن الزوايا المتساوية تكون مقابلة للأضلاع
 المتساوية لأن الزاويتين المتساويتين α و γ مقابلتان للأضلعين المتساويين
 $\beta - \delta$ و $\delta - \epsilon$

(الدعوى يب النظرية شكل ٢٨)

كل مثلث متساوي الساقين زاويتاه المقابلتان لساقيه متساويتان
 أي إذا كان الساق $\alpha - \gamma$ مساويا للساق $\gamma - \delta$ من المثلث $\alpha - \gamma - \delta$ تكون
 الزاوية $\beta - \delta$ مساوية للزاوية $\delta - \epsilon$

(برهان) ان ينصف الضلع $\beta - \delta$ بنقطة مثل γ ويوصل المستقيم $\alpha - \gamma$ فيكون
 المثلثان الحادثان $\alpha - \gamma - \delta$ و $\gamma - \delta - \epsilon$ متساويين لأن الضلع $\alpha - \gamma$ مشترك والضلع
 $\alpha - \gamma =$ للضلع $\gamma - \delta$ فرضا والضلع $\gamma - \delta =$ للضلع $\delta - \epsilon$ عملا (كافي)
 النظرية الحادية عشر) ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن تكون الزاوية $\beta - \delta =$
 للزاوية $\delta - \epsilon$ وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم أن أي ضلع من أضلاع المثلث غير المتساوي الساقين يصح أن يعتبر قاعدة
 ورأس الزاوية المقابلة له تسمى رأس المثلث وأما المثلث المتساوي الساقين
 فقاعدته ضاعه الثالث أي مادون الساقين

(وينتج من هذه النظرية)

أولا أن كل مثلث متساوي الأضلاع فهو متساوي الزوايا
 وثانيا أن المستقيم الواصل من رأس مثلث متساوي الساقين إلى وسط قاعدته
 يكون عمودا عليها وينصف الزاوية الرأس لأنه يلزم من تساوي المثلثين

ا د و ا د ه ان تكون الزاوية - ا د = للزاوية د ا ح والزاوية ا د -
= للزاوية ا د ه

(الدعوى يجب النظرية)

اذا تساوى زاويتان من مثلث تساوى الضلعان المقابلان لهما

اى اذا كانت الزاوية ا د - ا د ه يكون الضلع ا د = ا د ه

(برهانه) ان يقال لتصورنا مثلثا كالمثلث ا د - ح مساويا للمثلث ا د ه

بحيث يكون الضلع د - ح = د ه والزاوية د - ح = د ه والزاوية د - ح

= ثم طبقنا المثلث ا د - ح على المثلث ا د ه بحيث تقع النقطة د - ح

على النقطة د - ح والنقطة د - ح على النقطة د ه لكأن الزاوية د - ح = د ه

= وحينئذ يقع الضلع د - ا على الضلع د - ا والضلع د - ا على د ا

وتقع النقطة ا على النقطة ا فيكون ا د = ا د ه ويلزم من هذا

ان يكون ا د = ا د ه وهو المطلوب

(الدعوى يد النظرية شكل ٣٠)

اى مثلث احدى زاويتييه ا كبر من الاخرى يكون ضلعه المقابل للكبرى ا كبر

من ضلعه المقابل للصغرى وبالعكس اى اى مثلث ا كبر من ا كبر من الاخر

تكون زاويتييه المقابلة للضلع الاكبر ا كبر من زاويتييه المقابلة للضلع الاصغر

(برهان القضية الاولى) ان يقال لتكن الزاوية د - ح > د ه فيكون الضلع ا د

المقابل للزاوية د ا كبر من الضلع ا د المقابل للزاوية د - ح

ولبيان تناقض زاوية مثل د ه مساوية للزاوية د - ح فيكون المثلث الحادث

د ه د متساوى الساقين اى يكون د ه = د ه وحيث ان الخط

المستقيم ا د أقصر من ا د + د ه و ا د + د ه = ا د + د ه = د ه

ا د يكون ا د ا كبر من ا د

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال ليكن الضلع ا د < ا د فتكون الزاوية

د المقابلة للضلع ا د ا كبر من الزاوية د المقابلة للضلع ا د

اذ لو لم تكن الزاوية د ا كبر من الزاوية د لكأن اما أصغر منها أو مساوية

لها فان كانت أصغر منها الزم ان يكون $a > b$ وهذا مخالف للمفروض
وان كانت مساوية لها الزم ان يكون $a = b$ وهذا أيضا مخالف للمفروض
فاذن يلزم ان تكون الزاوية γ أكبر من الزاوية α وهو المطلوب

(الدعوى به النظرية شكل ٣١)

النقطة الخارجة عن مستقيم لا يمكن ان ينزل منها عليه الا عمود واحد
(وبرهانها) ان تفرض نقطة مثل γ خارجة عن المستقيم ab وان δ
عمود عليه ثم يقال ان أى مستقيم مدم من النقطة γ الى أى نقطة من نقاط
المستقيم ab غير النقطة δ لا يكون عمودا عليه فان قبل يمكن تنزيل عمود آخر
مثل δ ومثلا قلنا اذا مده δ على استقامته جهة δ ثم اخذ δ =
 δ ثم وصل المستقيم $\delta\delta$ وحدث مثلث $\delta\delta\delta$ = للمثلث $\delta\delta\delta$ لان
الضلع $\delta\delta$ مشترك والضلع $\delta\delta$ = للضلع $\delta\delta$ بالعمل والزاوية $\delta\delta\delta$ و
= للزاوية $\delta\delta\delta$ لقيامهما ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان تكون الزاوية
 $\delta\delta\delta$ مساوية للزاوية $\delta\delta\delta$ وحيث ادعى ان $\delta\delta$ عمود على ab تكون
الزاوية $\delta\delta\delta$ قائمة فتكون الزاوية $\delta\delta\delta$ كذلك ويلزم من هذا ان يكون
مجموع المتجاورتين $\delta\delta\delta$ و $\delta\delta\delta$ مساويا للقائمتين وعليه يكون الخط $\delta\delta$ وه
مستقيما واحدا مارا بالنقطتين δ و δ هما بالمراسم المستقيم $\delta\delta$ ويلزم
من هذا ان $\delta\delta$ كان وصل مستقيمين بين نقطتين وهو محال فتبين بهذا ان مجموع
المتجاورتين $\delta\delta\delta$ و $\delta\delta\delta$ وه لا يكون مساويا للقائمتين فينشأ لا تكون الزاوية
 $\delta\delta\delta$ قائمة بمعنى ان المستقيم $\delta\delta$ ليس عمودا على المستقيم ab وهو المطلوب

(الدعوى به النظرية شكل ٣٢)

اذا أخذت نقطة خارج مستقيم وأنزل منها عمودا ومرارا فاعلم
أولا ان العمود أقصر من كل ماثل

وثانيا ان المائلين ذوى البعدين المتساويين عن موقع العمود متساويان

وثالثا ان بعدى المائلين المتساويين عن موقع العمود متساويان

ورابعا ان المائلين ذوى البعدين غير المتساويين أبعدهما عن موقع العمود

أطولهما

نرخامسا ان المائلين غير المتساويين أطولهما أبعدهما عن موقع العمود
أى اذا أخذت نقطة مثل a خارج خط مثل de وأنزل منها عمود as

وموازل ah و ac و ad الخ فاعلم

أولاً ان العمود as يكون أصغر من كل مائل

وثانياً ان الخطين ac و ah المائلين المتباعدين عن موقع العمود يكونان
متساويين اذا كان البعدان sc و sh متساويين

وثالثاً ان المائلين ac و ah اذا كانتا متساويين فالبعدان sc و sh
يكونان كذلك

ورابعاً ان البعد sd اذا كان أكبر من البعد sh كان المائل ad أطول
من المائل ah

وخامساً ان المائل ad اذا كان أطول من المائل ah كان البعد sd أكبر
من البعد sh

(برهان القضية الاولى) ان عمود العمود as على استقامته جهة s ثم يؤخذ
البعد $so = ar$ ويوصل rd فيحدث مثلث $ord =$ للمثلث
 asr لان الزاوية $ord = r$ لقيامهما والضلع or مشترك
والضلع $os =$ للضلع sa بالعمل ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان
يكون الضلع $rd = r$ لكن في المثلث ard الضلع $ad > ar + rd$ أى
ان $ad > r + r$ فاذن يكون $ad > ar$ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال حيث ان البعد $sc = sh$ بالفرض
والضلع as مشترك والزاوية $scs = shs$ للزاوية as لقيامهما يكون
المثلث $asc =$ للمثلث ash ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان يكون
 $ac = ah$ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثالثة) أن يقال حيث ان المائل $ac = ah$ للمائل ah
يكون المثلث cas متساوى الساقين فينفذ يكون العمود as التازل من

وأسمه على قاعدته ما را بسطها أى يكون $حـ = رـ هـ$ وهو المطلوب
 (وبرهان القضية الرابعة) ان يقال حيث ان البعد $سـ < رـ هـ$ يكون
 المائل $اى < ا هـ$ لانه اذا أخذ $حـ = رـ هـ$ ووصل $ا حـ$ و $حـ و$ يحدث
 مثلث $ورـ حـ =$ للمثلث $رـ حـ ا$ لان الزاوية $ورـ حـ =$ للزاوية $رـ حـ ا$
 لقياهما والضلع $حـ$ مشترك والضلع $ورـ =$ للضلع $رـ ا$ بالعمل ويلزم
 من تساوى هذين المثلثين ان يكون $وـ حـ = حـ ا$ وأيضا اذا وصل $وـ ا$ يحدث
 مثلث $ورـ =$ للمثلث $رـ ا$ لان الزاوية $ورـ =$ للزاوية $رـ ا$
 لقياهما والضلع $رـ$ مشترك والضلع $ورـ =$ للضلع $رـ ا$ بالعمل ويلزم
 من تساوى هذين المثلثين ان يكون $وـ ا = ا حـ$ لكن $اى < وـ حـ$ و $ا حـ < وـ ا$ أى
 $ا < ا حـ$ أو $اى < ا حـ$ و $ا حـ = ا هـ$ فيكون $اى < ا هـ$ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الخامسة) ان يقال حيث ان المائل $اى$ أطول من المائل
 $ا هـ$ يكون البعد $رـ$ أكبر من البعد $هـ$ لانه لو لم يكن البعد $رـ$ أكبر
 من البعد $هـ$ لكان مساويا له أو أصغر منه فان كان مساويا له يلزم ان يكون
 المائل $اى$ مساويا للمائل $ا هـ$ وهذا مخالف للمفروض وان كان أصغر منه
 يلزم ان يكون المائل $اى$ أصغر من المائل $ا هـ$ وهو أيضا مخالف للمفروض
 فاذن يكون البعد $رـ$ أكبر من البعد $هـ$ وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

أولا ان البعد الحقيقي بين نقطة ومستقيم هو العمود النازل منها عليه لانه تبين ان
 العمود أصغر من كل مائل ما رتبها وبأى نقطة من نقطة
 وبأنبائه لا يمكن ان يوصل من نقطة الى مستقيم ثلاثة خطوط مستقيمة متساوية
 لانه تبين ان المائل الأبعد عن العمود هو الأطول من المائل الأقرب للعمود
 المذكور

(الدعوى السابعة عشرة النظرية)

اذا أقيم عمود على وسط مستقيم محدود فاعلم أولا ان البعدين الموصولين من أى
 نقطة من نقطة العمود الى نهايتى المستقيم المذكور يكونان متساويين وثانيا ان

البعدين الموصولين من أى نقطة خارج العمود الى نهايتى المستقيم المذكور
لا يكونان متساويين أى اذا أقيم عمود $وه$ على وسط مستقيم $ا ب$ محدود
بنقطتين $ا و$ فان البعدين $ا د و د ب$ يكونان متساويين
والبعدين $ا ب و ب د$ لا يكونان متساويين

(برهان القضية الاولى) ان يقال حيث ان البعد $ا ب = ب د$ بالفرض يكون
المائل $ا د = د ب$ والمائل $ا و = و ب$ والمائل $ا ه = ه د$ فبينهم هذا
ان البعدين الموصولين من أى نقطة من نقط العمود $هو$ الى نهايتى المستقيم
 $ا ب$ يكونان متساويين

(وبرهان القضية الثانية) ان تفرض نقطة مثل $ز$ خارج العمود $هو$ ثم
يوصل $ز ا و ز ب و ز د$ فيكون $ا د = د ب$ كما سبق وحيث ان
في المثلث $ز د ب$ الضلع $ز ب > ز د + د ب$ يكون $ز ا > ز ب$ يكون $ز ب$
 $> ز د + د ا و ز د + د ا = ز ا$ فيكون $ز ب > ز ا$ أى ان البعدين
الموصولين من أى نقطة خارج العمود $هو$ الى نهايتى المستقيم $ا ب$
لا يكونان متساويين

* (الدعوى الثامنة عشرة النظرية) *

يتساوى المثلثان القائم الزاوية اذا تساوى منهما الوتر والزاوية
ليكن الوتر $ا ب = ب د$ والضلع $ا د = د ه$ فاقول ان المثلث القائم الزاوية
 $ا ب د$ يكون مساويا للمثلث القائم الزاوية $د ه و$ وتضح مساواة المثلثين اذا
كان الضلع الثالث $ب د$ مساويا للضلع الثالث $وه$ فاذا فرض ان هذين
الضلعين ليسا متساويين ران $ب د$ أكبر من $وه$ فيؤخذ $ز ب = ب د$
ويوصل $ا ز$ فيحدث مثلث $ا ب ز$ يساوى للمثلث $د ه و$ لان الزاوية
القائمة $ب$ تساوى للزاوية القائمة $ه$ والضلع $ا ب = ب د$ والضلع $ب ز$
 $= د و$ فحينئذ هذان المثلثان متساويان ويلزم من تساويهما ان يكون $ا ز$
 $= د و$ والمقرر ان $د ب = ب د$ فحينئذ $ا ب = ب د$ لكن المائل $ا د$
لا يمكن ان يساوى $ا ب$ لانه متباعد عن الحدود $ا ب$ أكثر من $ا ز$ فحينئذ

لا يمكن ان يكون $\angle \alpha$ أكبر من $\angle \beta$ ويمثل هذا يبرهن على انه لا يمكن ان يكون $\angle \alpha$ أصغر من $\angle \beta$ فاذا المثلث $\alpha \beta \gamma =$ للمثلث $\beta \gamma \delta$ وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة عشرة النظرية)

يتساوى المثلثان القائم الزاوية اذا تساوى منهما الوتر وزاوية غير القائمة
ليكن $\alpha \beta \gamma = \delta \epsilon \zeta$ والزاوية $\alpha = \delta$ فيوضع المثلث $\delta \epsilon \zeta$ على $\alpha \beta \gamma$ بان
يوضع $\delta \epsilon$ على $\alpha \beta$ فنحن حيث ان الزاوية δ مساوية للزاوية α فضع $\delta \zeta$
ياخذ اتجاه $\alpha \gamma$ وأيضا هو ياخذ اتجاه $\beta \gamma$ والا لا يمكن من نقطة γ
تنزيل عمودين على $\alpha \beta$ فينشد النقطة δ تقع على النقطة ϵ وينطبق
المثلثان على بعضهما انطباقا كليا وهو المطلوب

(الدعوى العشرون النظرية)

اذا انصفت زاوية بمستقيم فاعلم أولان العمودين النازلين على ضلعها من أى
نقطة من نقطة متساويان

وثانيا ان العمودين النازلين على ضلعها من أى نقطة خارجة عنه ليسا متساويين
أى اذا انصفت زاوية مثل $\alpha \beta \gamma$ بمستقيم $\alpha \delta$ فاعلم أولان العمودين
 $\delta \epsilon$ و $\delta \zeta$ النازلين على ضلعها $\alpha \beta$ و $\alpha \gamma$ من أى نقطة من نقط الخط $\alpha \delta$
كالنقطة و يكونان متساويين

وثانيا ان العمودين $\delta \epsilon$ و $\delta \zeta$ النازلين على ضلعها $\alpha \beta$ و $\alpha \gamma$ من نقطة
مثل δ خارجة عن المستقيم $\alpha \delta$ لا يكونان متساويين

(برهان القضية الاولى) ان يقال حيث ان الزاوية $\alpha = \delta$ للزاوية $\alpha \beta \gamma$ و $\alpha \delta \epsilon$
خرضا الوتر $\alpha \epsilon$ مشتركا بين المثلث $\alpha \beta \epsilon$ والمثلث $\alpha \gamma \epsilon$ الزاوية α والمثلث
 $\alpha \delta \epsilon$ الزاوية δ يكون المثلثان متساويين ويلزم من تساويهما ان
يكون البعد $\alpha \epsilon =$ للبعد $\alpha \delta$ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) ان ينزل من النقطة δ عمود $\delta \epsilon$ على الضلع $\alpha \beta$
ثم يوصل مستقيم $\delta \zeta$ فيكون العمود $\delta \epsilon$ أصغر من المائل $\delta \zeta$ وحيث
ثبت في المثلث $\delta \epsilon \zeta$ ان الضلع $\delta \epsilon < \delta \zeta$ و $\angle \epsilon < \angle \zeta$ وان $\angle \epsilon = \angle \zeta$

يكون هل \angle هـ ح + ح د لكن هـ ح + ح د = هـ د فيكون هل \angle هـ د
 وحيث ان طه \angle هل يكون طه \angle هـ د وهو المطلوب
 * (تبييه) *

المستقيم المنصف لزاوية هو المحل الهندسى لكل نقطة بعداها عن ضاهى الزاوية
 متساويان

* (مبحث الخطوط المتوازية وتقاطعها) *

* (الدعوى الحادية والعشرون النظرية) *

المستقيمان ا ح و رى العمودان على مستقيم ثالث ح د يكونان متوازيين
 لانهم ما ان تلاقيان في نقطة مثل م لا يمكن من هذه النقطة تنزيل عمودين على
 ح د وهو محال

* (الدعوى الثانية والعشرون النظرية) *

من نقطة يمكن ان يمد مستقيمان موازيين لمستقيم معلوم
 فمن نقطة ا ينزل ا ر عمودا على ر ح المعلوم ومن النقطة المذكورة ا
 يقام ا د عمودا على ا ر فيكون ا د موازيا ر ح لان المستقيمين ا د و
 ر ح عمودان على ا ر
 ومن البديهي انه لا يمكن أن يمد المستقيم واحد من نقطة معلومة بحيث يكون
 موازيا للمستقيم مقروض

* (الدعوى الثالثة والعشرون النظرية) *

اذا كان مستقيمان ح د و ا ر متوازيين فكل مستقيم ر ح عمود
 على احدهما ا ر يكون عمودا على الآخر ح د
 ومن الواضح ان خط ر ح لا بد أن يقطع خط ح د والا لا يمكن من نقطة ر
 مدم مستقيمين موازيين لخط ح د وبيان أن خط ح د عمود على ر ح يقال
 اذا كان الخط ح د مائلا على ر ح يمكن ان يقام من نقطة ح عمود على
 ر ح فيكون هـ ذا العمود موازيا لخط ا ر وحيث ان يمكن وجود مستقيمين
 مارين بالنقطة ح وكلاهما موازيا للخط ا ر وهو محال

* (الدعوى الرابعة والعشرون النظرية) *

المستقيمان $ا- و$ موازيان لثالث هو يكونان متوازيين
لانه اذا تلاقي المستقيم $ا$ مع المستقيم $و$ في نقطة مثل $م$ لا يمكن أن يمد
من هذه النقطة مستقيمان موازيان لخط $هو$ وهو محال

* (تعريف) *

اذا قطع مستقيم مثل $هو$ مستقيمين مثل $ا- و$ فحدث ثمان زوايا في
نقطتي التقاطع $س و ح$ فالاربع زوايا (١) و (٤) و (٥) و (٨) الداخلة
في المسافة الكائنة بين المستقيمين $ا- و$ تسمى زوايا داخلة والاربع زوايا
الآخر تسمى زوايا خارجة

وكل زاويتين مثل زاويتي (١) و (٥) موضوعة احدهما في جهة بالفسبة
للقاطع مخالفة لجهة وضع الاخرى ويكونان داخليين وغير متجاورين فانهم
يسميان زاويتين متبادلتين داخليتين

وكل زاويتين مثل زاويتي (٨) و (٢) موضوعتين في جهة واحدة من القاطع
واحداهما داخلة والاخرى خارجة وغير متجاورتين فانهم اسميان زاويتين
متناظرتين وكل زاويتين مثل زاويتي (٢) و (٦) موضوعتين بجانب القاطع
وخارجيتين وغير متجاورتين فانهم اسميان زاويتين متبادلتين خارجيتين

* (الدعوى الخامسة والعشرون النظرية) *

اذا قطع المستقيم مستقيمين متوازيين فالزاويتان المتبادلتان الداخلتان
تكونان متساويتين

وثانيا الزاويتان المتبادلتان الخارجتان تكونان متساويتين

وثالثا الزاويتان المتناظرتان تكونان متساويتين

ورابعا الزاويتان الداخلتان الموضوعتان في جهة واحدة من القاطع مجموعهما
يساوي قائمتين

برهان القضية الاولى أن يقال ليكن خط $ا- و$ موازيان لخط $ح د$ وخط $س ح$
قاطعهم في نقطة $ط$ وسط هو ينزل ط م عمودا على $ا- و$ فهذا الخط

يكون أيضا عمودا على $ح د$ ويكون المثلثان القائم الزاوية $م ط ه و$ و $ط د و$ متساويين لان الوترين $ط ه و$ و $ط د$ متساويان بالعمل والزاويتان $م ط ه و$ و $ط د ه و$ متساويتان لانهما متقابلتان بالرأس وينتج من تساوى هذين المثلثين أن الزاويتين المتبادلتين الداخليتين $م ه ط و$ و $ط د ه و$ متساويتان ولاشك أن زاوية $ه و د$ تساوى زاوية $ه و ح$ يقال من المعلوم ان مجموع زاويتي $ا ه و$ و $ه و د$ يساوى قائمتين وأيضا مجموع زاويتي $د و ه و$ و $ح و ه و$ يساوى قائمتين فيكون $ا ه و + ه و د = د و ه + ح و ه$ لكن زاوية $ا ه و = د و ه$ فتكون زاوية $ه و د = ح و ه$

وثانيا الزاويتان المتبادلتان الخارجتان $ن ر ه و$ و $ح و د$ متساويتان لانهما مقابلتان بالرأس للزاويتين المتبادلتين الداخليتين $م ه ط و$ و $ط د ه و$ ثالثا الزاويتان المتناظرتان $ن ر ه و$ و $ه و د$ متساويتان لان $ن ر ه و = ا ه و$ و $ا ه و = ه و د$ رابعا مجموع زاويتي $ه و د$ و $ه و د$ يساوى قائمتين لان $ه و د + ا ه و = قائمتين$ و $ا ه و = ه و د$

(الدعوى السادسة والعشرون النظرية) *

وبالعكس اذا حدث من مستقيمين مع مستقيم قاطع زوايا متبادلة داخلية متساوية أو زوايا متبادلة خارجية متساوية أو زوايا متناظرة متساوية أو زوايا داخلية في جهة واحدة من الناطع ومجموعها يساوى قائمتين فهذان المستقيمان يكونان متوازيين

أولا ليكن المستقيمان $ا ب$ و $ح د$ مقطوعين بالقاطع $ن ر ح$ فاذا كانت الزاويتان المتبادلتان الداخليتان $ا ه و$ و $ه و د$ متساويتين يكون خط $ا ب$ موازيا لخط $ح د$

لانه لو لم يكن خط $ا ب$ موازيا لخط $ح د$ فيمكن أن يمتد من النقطة $ه$ مستقيما $ه و د$ يوازي خط $ح د$ ويلزم من هذا أن تكون الزاويتان $ه و د$ و $د و ه و$ متساويتين لكونهما متبادلتين داخليتين والمفروض أن زاوية $ا ه و = ه و د$

فتكون زاوية $أهـو = هـو$ وهذا محال
وثانيا إذا كانت الزاويتان المتبادلتان الخارجتان $زهر$ و $جـو$ متساويتين
تكون الزاويتان $أهـو$ و $هو$ متساويتين أيضا وبما يقتضيه ما تقرير يكون
خط $أ -$ موازيا لخط $جـ$

وثالثا إذا كانت الزاويتان المتناظرتان $زهر$ و $هو$ متساويتين يكون
خط $أ -$ موازيا لخط $جـ$ لأن زاوية $زهر$ تساوي زاوية $أهـو$ فتكون
زاوية $أهـو = هو$ ويلزم من هذا أن يكون خط $أ -$ موازيا لخط $جـ$
ورابعا إذا كان مجموع زاويتي $زهر$ و $هو$ مساويا لقائمتين يكون خط
 $أ -$ موازيا لخط $جـ$ لأنه من كون $زهر + أهـو = قائمتين$ ينتج من ذلك
أن زاوية $أهـو = هو$ ويلزم من هذا أن يكون خط $أ -$ موازيا لخط $جـ$
(الدعوى السابعة والعشرون النظرية)

الزاويتان اللتان اضلاعهما المتناظرة متوازية. تساويتان أو مجموعهما يساوي
قائمتين

أولاً لتكن $أ - جـ$ و $هو$ زاويتين اضلاعهما متوازية ومتجهة إلى جهة
واحدة فهاتان الزاويتان $تكونان$ متساويتين وذلك أن الزاوية $زجـ$
تساوي الزاوية المتناظرة لها $هو$ وأيضا الزاوية $زجـ$ تساوي الزاوية
المتناظرة لها $أ -$ فتكون زاوية $أ - = هو$
وثانياً لتكن $أ - جـ$ و $م هـ$ زاويتين اضلاعهما متوازية ومتجهة في اتجاه
مضاد فهاتان الزاويتان تكونان أيضاً متساويتين لأن زاوية $م هـ = هو$
وزاوية $هو = أ -$

وثالثاً الزاويتان $أ - جـ$ و $م هـ$ اللتان اضلاعهما المتناظرة متوازية ولكن
ضلعان منها $هو$ و $أ -$ متجهان إلى جهة واحدة والضلعان الآخران
 $جـ$ و $م هـ$ كل منهما متجه بعكس اتجاه الآخر مجموعهما يساوي قائمتين لأن
مجموع زاويتي $م هـ$ و $هو$ يساوي قائمتين وزاوية $هو$ تساوي
زاوية $أ -$

(الدعوى الثامنة والعشرون النظرية)

الزاويتان اللتان اضلاعهما المتناظرة متعامدة متساويتان أو متكاملتان أى
أن مجموعهما يساوى قائمتين

لتكن α و β زاويتين اضلاعهما المتناظرة متعامدة فمقد من النقطة α
خط α عمودا على α ونفذ أيضا خط β عمودا على خط β
فالمستقيمان α و β يكونان متوازيين بالتناظر للمستقيمين α و β
ومتجهين في جهة واحدة فحينئذ زاوية α تساوى زاوية β وهو وحيد
أن مجموع زاويتي α و β يساوى زاوية قائمة وكذا مجموع زاويتي
 α و β يساوى زاوية قائمة فحينئذ تكون زاوية α مساوية
لزاوية β

فتبينه إذا اعتبرت الزاوية القائمة بين المستقيم α وامتداد المستقيم β
بشاهد أن مجموع زاويتي α و β يساوى زاويتين قائمتين

(الدعوى التاسعة والعشرون النظرية)

مجموع زوايا المثلث يساوى زاويتين قائمتين

فيمتد α يوازي β ويمتد γ جهة α فنحذف زاوية α تساوى
زاوية β لكونهما زاويتين متناظرتين بالنسبة للمتوازيين α و β و α
المقطوعين بالقاطع α وأبضا زاوية β تساوى زاوية γ و α
لكونهما زاويتين متبادلتين داخمتين بالنسبة للمتوازيين α و β و α
المقطوعين بالقاطع α فحينئذ مجموع زوايا المثلث يساوى لمجموع الثلاث زوايا
التي هي α و β و γ وهى المنشأة حول نقطة α في جهة واحدة
من المستقيم α وحيد أن هذا المجموع الأخير يساوى زاويتين قائمتين يلزم
أن يكون المجموع الأول مساويا لزاويتين قائمتين كذلك

نتيجة أولى لا يمكن أن يوجد في المثلث الا زاوية قائمة ومن البديهي انه لا يمكن
أن يوجد في المثلث الا زاوية منفرجة

نتيجة ثانية في كل مثلث قائم الزاوية مجموع زاويتي الحادتين يساوى زاوية قائمة

نتيجة ثالثة اذا علمت زاويتان من مثلث أو مجموعهما تعلم الزاوية الثالثة بطرح هذا المجموع من القائمةين

نتيجة رابعة الزاوية الخارجية \angle اى الحادثة بين ضلع \angle ا وامتداد ضلع \angle ا ح تساوى لمجموع الزاويتين الداخلتين \angle ح ا و \angle ح ا
 * (الدعوى الثلاثون النظرية) *

مجموع الزوايا الداخلة من مضلع محدب يساوى من أمثال القائمةين بقدر ما فيه من الاضلاع الاثنى

فن أحد الرؤس \angle نصل الاقطار لجميع الرؤس الغير متجاورة فينقسم المضلع الى مثلثات عددها كعدد اضلاعه الاضلعين لانه يمكن اعتبار هذه المثلثات المختلفة متحدة الرؤس \angle وقواعدها اضلاع المضلع ماعدا المثلثين المتطرفين اللذين كل منهما يحتوى على ضلعين من المضلع المذكور ويشاهد أيضاً أن مجموع زوايا هذه المثلثات يساوى لمجموع زوايا المضلع فينشد هذا المجموع الاخير يساوى من أمثال القائمةين بقدر ما فيه من الاضلاع الاضلعين

واذا رمز بالحرف Σ لعدد اضلاع المضلع فمجموع زواياه يكون

$$\Sigma (2 - 2) = 2 - 2 = 0$$

* (الدعوى الحادية والثلاثون النظرية) *

الاضلاع المتقابلة والزوايا المتقابلة في المتوازي الاضلاع متساوية

فاذا وصل القطر \angle يحدث المثلثان \angle ا و \angle ح فيهما الضلع \angle مشترك وبسبب توازي \angle ا و \angle ح تكون زاوية \angle ا = \angle ح وبسبب توازي \angle ا و \angle ح تكون زاوية \angle ا = \angle ح فيثبت يكون المثلثان \angle ا و \angle ح متساويين فيثبت يكون الضلع \angle المقابل للزاوية \angle ا مساوياً للضلع \angle المقابل للزاوية المساوية لها \angle ح وأيضاً يكون الضلع الثالث \angle مساوياً للثالث \angle فيثبت الاضلاع المتقابلة من متوازي الاضلاع متساوية

وأيضاً من تساوى المثلثين المذكورين تكون زاوية \angle مساوية لزاوية \angle

وزاوية $ا د ح$ المركبة من زاويتي $ا د و$ و $و د ح$ مساوية لزاوية $ا ب ح$
 المركبة من زاويتي $د ر ح$ و $ا د ر$ فحينئذ الزاوية المتقابلة في المتوازي
 الاضلاع متساوية

نتيجة أولى المستقيمان المتوازيان $ا ب$ و $ح د$ المحصوران بين مستقيمين
 متوازيين آخرين $ا د$ و $ر ح$ يكونان متساويين

نتيجة ثانية المستقيمان المتوازيان على ابعاد متساوية في جميع امتدادهما لانه
 من كون $د و$ و $ا ر$ متوازيين فاذا أنزلنا من النقطتين $ح$ و $ر$ عمودين
 $ح و$ و $ر ه$ على $ا ب$ فهذان العمودان يكونان متوازيين ومتساويين
 لانهما محصوران بين مستقيمين متوازيين

(الدعوى الثانية والثلاثون النظرية)

اذا كان في شكل رباعي $ا ب ح د$ كل ضلعين متقابلين متساويين أعنى اذا كان
 $ا ر = د و$ و $ا د = ر ح$ فالاضلاع المتساوية تكون متوازية والشكل
 يكون متوازي الاضلاع

لانه لو وصل القطر $ر د$ لحدث مثلثان $ا د و$ و $ر د ح$ اضلاعهما المتناظرة
 متساوية فهما متساويان ويلزم من تساويهما أن تكون الزاوية $ا د ر$
 المقابلة للضلع $ا ر$ مساوية للزاوية $ر د ح$ المقابلة للضلع $د و$ وعليه يكون
 الضلع $ا د$ موازيا للضلع $ر ح$ وبمثل هذا يبرهن على أن الضلع $ا ب$ يوازي
 $د و$ فحينئذ الشكل الرباعي $ا ب ح د$ هو متوازي الاضلاع

(الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية)

اذا كان الضلعان المتقابلان $ا ب$ و $ح د$ من شكل رباعي متساويين
 ومتوازيين فالضلعان الآخران يكونان كذلك متساويين ومتوازيين والشكل
 $ا ب ح د$ يكون متوازي الاضلاع

فاذا وصل القطر $ر د$ يحدث المثلثان $ا د و$ و $ر د ح$ متساويان لان خط
 $ا ب$ يوازي $د و$ فتكون الزاويتان المتبادلتان الداخلتان $ا د و$ و $ر د ح$
 متساويتين والضلع $ا ر = د و$ بالقرض والضلع $د ر$ مشترك فحينئذ

المثلثان المذكوران يكونان متساويين ويلزم من تساويهما أن يكون
 $\angle د = \angle ح$ وان تكون الزاوية $\angle د = \angle ح$ وعليه يكون خط $د$
 موازيا لخط $ح$ فثبت ذلك الشكل $أ - د - ح$ هو متوازي الاضلاع
 * (الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية) *

قطر المتوازي الاضلاع $أ - د - ح$ و $د - ح$ ينصفان بعضهما
 لانه بقاونة المثلث $أ - د - ح$ بالمثلث $د - ح - د$ يشاهد ان الضلع $أ - د = د - ح$
 والزاوية $\angle د = \angle ح$ والزاوية $\angle د = \angle ح$ فثبت ان المثلثان
 المذكوران يكونان متساويين ويلزم من هذا أن يكون الضلع $أ - د$ المقابل
 للزاوية $\angle د$ مساويا للضلع $د - ح$ المقابل للزاوية $\angle ح$ ويكون أيضا
 $د - ح = د - ح$

تنبيه قطرا المعين ينصفان بعضهما عمادا لانه في الحالة التي يكون فيها الشكل
 المتوازي الاضلاع شكلا معينيا يكون الضلعان $أ - د$ و $د - ح$ متساويين
 ويكون المثلثان $أ - د - ح$ و $د - ح - د$ متساويين بسبب تساوي اضلاعهما
 المتناظرة وينتج من تساويهما أن الزاوية $\angle د = \angle ح$ فثبت قطرا
 المعين ينصفان بعضهما عمادا

نعت المقالة الاولى

(المقالة الثانية)
(في بيان الدوائر ومقادير الزوايا)
(الحدود)

١ (شكل ٤٦) محيط الدائرة هو الخط المنحني الذي تكون الأبعاد بين أي نقطة من نقطه والنقطة الداخلة متساوية وتلك النقطة الداخلة تسمى مركزا والدائرة هي السطح المحاط بذلك الخط المنحني اعلم ان بعضهم عرف الدائرة والمحيط بتعريف واحد من غير تمييز وخصوص تعريف كل واحد منهما بما يتميز على ما ذكره بادي نامل لان الدائرة هي سطح مستو له طول وعرض وأما المحيط فهو الخط الذي ليس له الا طول فقط

٢ جميع الخطوط المستقيمة الواصلة من المركز الى المحيط مثل $ح ا$ و $ح ه$ و $ح د$ الخ تسمى أنصاف أقطار وكل خط يمر بالمركز وينتهي بالحيط مثل خط $ا - ب$ يسمى قطرا

فعلى ما ذكر في تعريف الدائرة جميع انصاف الاقطار متساوية وحيث ان الاقطار هي أضلاع انصاف الاقطار فهي أيضا متساوية

٣ جزء محيط الدائرة مثل $د و ح$ يسمى قوسا والخط المستقيم الواصل بين $د$ و $ح$ بقوس يسمى وتر القوس و $د و ح$ وتر القوس

٤ قطعة الدائرة هي جزء من الدائرة يحاط بقوس ووتره

اعلم ان وتره $د و ح$ دائما يكون مختلفا بالقوس الا في الزوايا $د و ح$ وانما القوس الأكبر والقطعة الكبرى ان لم يكن مخصوصا بهما

٥ قطاع الدائرة هو قسم من الدائرة يحاط بقوس $د و ح$ ونصفي قطر $د و ح$ الواصلين الى نهايتي ذلك القوس

٦ (شكل ٤٧) الخط المرسوم داخل الدائرة هو خط مستقيم من رسوم داخل الدائرة طرفاه منتهيان بالحيط كخط $ا - ب$

الزاوية المرسومة داخل الدائرة هي زاوية رأسها بالمحيط وطرفاها محاطان
بوترين مثل زاوية - أ -

المثلث المرسوم داخل الدائرة هو مثلث رأسه بالمحيط كمثلث - أ -
وعلى العموم الشكل المرسوم داخل الدائرة هو الشكل الذي تكون جميع زواياه
بالمحيط وحينئذ هذه الدائرة تسمى الدائرة المارة بزوايا ذلك الشكل المرسوم
٧ (شكل ٤٨) الخط الذي يقطع محيط الدائرة في موضعين يسمى خطاً قاطعاً
كخط - أ -

٨ الخط الذي لا يشترك مع محيط الدائرة الا في نقطة واحدة فقط يسمى خطاً
مماساً ونقطة م المشتركة بين ذلك الخط والمحيط تسمى نقطة التماس
٩ وبهذا علم انه متى كان لمحيطي الدائرتين نقطة مشتركة فقط يكون هذان
المحيطان متماثلين

١٠ (شكل ١٦٠) اذا كانت اضلاع الشكل المستقيم الاضلاع مماسة بمحيط
الدائرة فيقال لذلك الشكل شكل مرسوم على الدائرة وتسمى تلك الدائرة دائرة
مرسومة داخل الشكل المستقيم الاضلاع المذكور
* (الدعوى الاولى النظرية) *

(شكل ٤٩) كل قطر مثل أ - يقسم الدائرة والمحيط قسمين متساويين
لانه لو جعل قطر أ - قاعدة مثلث وانطبق شكل أ ه - على شكل
أ و - لكان منحنى أ ه - واقعا على منحنى أ و - ومنطبقا عليه
كحال الانطباق والالتماس في احد هذين المنحنين نقطة واقعة على ابعاده غير
متساوية من المركز وهذا خلاف لما صرف في تعريف الدائرة فعلى هذا يلزم ان المنحنين
المذكورين والشكلين المذكورين منطبقان ومتساويان ومن ثمة ثبت المطلوب
بان ذلك القطر يقسم الدائرة والمحيط قسمين متساويين
* (الدعوى الثانية النظرية) *

كل وتر مرسوم داخل الدائرة هو اصغر من القطر (شكل ٤٩)
لانه متى وصل نصف قطر أ - و ج - الى نهايتي وتر ا د فيحدث مثلث

ا د فیه ا د > ا د + د ومن کون ا د + د =
 قطر ا يلزم أن يكون ا د > ا - و بهذا ثبت المطلوب بأن الوتر يكون
 أصغر من القطر

نتيجة أكبر ما يمكن رسمه من الخط القاطع داخل الدائرة يكون مساوياً للقطر
 * (الدعوى الثالثة النظرية) *

الخط المستقيم لا يقطع محيط الدائرة الا في نقطتين فقط فان قيل يقطعها في ثلاث
نقطه أجيب بأنه لو قطع محيط الدائرة في ثلاث نقطه للزم أن تكون الابعاد بين المركز
وبين تلك النقطه متساوية وهـذا يقتضى انه يمكن تساوى ثلاثة خطوط منحرجة
من نقطة الى خط مستقيم وهذا خلاف النظر (مقالة ١ دعوى ١٦) ومن ثمة ثبت
المطلوب بأن الخط المستقيم القاطع لا يقطع محيط الدائرة الا في نقطتين فقط
(الدعوى الرابعة النظرية)

في الدائرة الواحدة والدوائر المتساوية الاقواس المتساوية تكون موزعة للاوتار المتساوية وبالعكس الاوتار المتساوية تكون موزعة للاقواس المتساوية

مثلا (شكل ٥٠) اذا كان يلزم في الدوائر المتساوية نصف قطر ac يكون مساويا لنصف قطر $هر$ فان كان قوس $اطء$ مساويا لقوس $هـ د ح$ يكون وتر $اى$ مساويا لوتر $هـ ح$ لانه يلزم من كون قطر $اى$ مساويا لقطر $هـ د$ ومنصفها للدائرة يمكن ان ينطبق نصف دائرة $اطء$ على نصف دائرة $هـ د$ و المساوى له انطباقا كاملا بان يكون قطر $اى$ واقعا على قطر $هـ د$ وبهذا يتحدد منحنى $اطء$ مع منحنى $هـ د$ و ويكون منطبقا عليه. ولولم ينطبق عليه لكان في هذين المنحنيين نقط واقعة على ابعاد غير متساوية من المركز وهذا بخلاف تعريف الدائرة فعلى هذا ينطبق هذان المنحنيان وليكون قوس $اطء$ مساويا لقوس $هـ د$ بالفرض تقع نقطة $د$ على نقطة $ح$ وتنطبق نهايات وترى $اى$ و $هـ ح$ ومن ثمة ثبت المطلوب بان الوترين متساويان

وبالعكس حيث ان انصاف أقطار الدوائر المتساوية متساوية ويكون نصف قطر

ا ح مساويا لنصف قطر ه د أقول متى كان وتر ا د مساويا لوتر ه ح
 يكون قوس ا ط د مساويا لقوس ه ح ع فاذا رسم نصف قطر د ح
 و ح د يكون في مثلثي ا ح د و ه د ح الحادئين ا ح = ه د
 و د ح = ح د وبالفرض ا د = ه ح فترتساوي الاضلاع
 الثلاث من هذين المثلثين يكونان متساويين انظر (مقالة ١) وتكون زاوية ا ح د
 مساوية لزاوية ه د ح فاذا انطبق نصف دائرة ا د ر على نصف دائرة
 ه د ح و المساوي له كما تقدم بهذا التحنيان ويلزم من كون زاوية ا ح د
 مساوية لزاوية ه د ح ان يقع نصف قطر د ح على نصف قطر ح د
 ونقطة د على نقطة ح فلذا ظهر وثبت المطلوب من أن يكون قوس ا ط د
 مساويا لقوس ه ح ع

(الدعوى الخامسة النظرية)

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتساوية الوتر الموتر للقوس الأكبر هو أكبر
 وبالعكس الوتر الأكبر يكون موترا للقوس الأكبر
 أولا لانه متى كان قوس ا ك أكبر من قوس ا د يكون وتر ا ك أكبر من
 وتر ا د وأيضا اذا وصل نصف قطر ح ا و ح ك ففي مثلث ا ح ك ضلعا
 ا ح و ح ك مساويان اضلعي ا ح و ح ك في مثلث ا ح د و ا ح ك
 زاوية ا ح ك أكبر من زاوية ا ح د يكون الضلع الثالث من المثلث الاول
 ا ك بمرى الضلع الثالث من المثلث الثاني وهو ا د انظر (مقالة ١٠ دعوى ١٠)
 وبهذا ثبت المطلوب بأن الوتر الموتر للقوس الأكبر هو الأكبر

ثانيا وبالعكس انه متى فرض ان وتر ا ك أكبر من وتر ا د يكون قوس
 ا ك أعظم من قوس ا د لان في مثلثي ا ح ك و ا ح د ضلعي ا ح
 و ح ك مساويان اضلعي ا ح و ح د و ا ك الذي هو الضلع الثالث
 فرض انه أكبر من ضلع ا د وبهذا تكون زاوية ا ح ك أكبر من زاوية
 ا ح د ومن ثمة ثبت المطلوب بأن قوس ا ك أكبر من قوس ا د
 تنبيه شرط في هذه الدعوى ان القوس المقروض يكون أصغر من نصف المحيط

لانه لو كان القوس أكبر من نصف المحيط لبد الناسئ مخالف لتامة ما صرح به
في الدعوى يعنى اذن اظهار انه كلما \llcorner كبر القوس صغر الوتر وبالعكس كلما صغر
الوتر كبر القوس وعلى هذا حيث ان قوس α أكبر من قوس β ك
يكون α وتر القوس الاول أصغر من β وتر القوس الثانى
* (الدعوى السادسة النظرية) *

اذا كان نصف قطر α وعمودا على وتر α ينصف الوتر المذ كورد وقوسه
المسمى α و β

لانه متى وصل نصف قطر α و β وهما بالنسبة الى عمود γ ماثلان
متساويان فيكون بعدا α و β متساويين (١٦) وأيضا يلزم من كون
 $\alpha = \beta$ وعمود γ عمودا مخرج من وسط وتر α فالبعدان
من أى نقطة واقعة على ذلك العمود الى نهايتى خط α متساويان وحيث
ان نقطة γ هى احدى النقط الواقعة على ذلك العمود يكون $\alpha = \beta$
ومتى كان وتر α و β مساويين للوتر γ يلزم أن يكون قوس α و β مساويا
لقوس γ فعلى هذا علم ان نصف قطر γ الواقع عمودا على وتر α
يقسم وتر α وقوسه فى نقطة γ الى قسمين متساويين ويثبت المطلوب γ
تنبيه \llcorner ونقطة γ التى هى وسط وتر α ونقطة γ التى
هى وسط القوس الموتر لذلك الوتر هذه الثلاث نقط وقعت على خط مستقيم واقع
عمودا على الوتر ومن كون انه يكفى نقطتان لتعيين خط مستقيم فان خط الذى يمر من
نقطتين من تلك النقط المذكورة لابد ان يمر من الاخرى ويكون ذلك الخط عمودا
على الوتر وكذلك العمود المخرج من وسط الوتر يمر بمركز الدائرة وبوسط القوس
الموتر لذلك الوتر لان ذلك العمود هو عين العمود النازل من المركز على وسط الوتر
فكل واحد من هذين العمودين عمود على وسط الوتر فلزم ان يهدها والالكان
يمكن اخراج عمودين من نقطة على خط مستقيم وهذا خلاف

* (الدعوى السابعة النظرية) *

يمكن ان يمر من ثلاث نقط α و β و γ التى ليست على خط مستقيم محيط

دائرة فقط ولا يمكن مرور محيط آخر

في وصل خط $ا - و$ ومتى تنصف بمودي $د ه و$ فهذان العمودان يلتقيان في نقطة $ح$ ولولم يلتقيا لكانا متوازيين فان قيل انهما متوازيان يقال حيث ان خط $ا - و$ عمود على $د ه$ يكون عمودا على خط $و د$ الموازي الاخر واذن لكانت زاوية $ط$ قائمة ولا تكون نقطة $ا و ر$ وليست على خط مستقيم يكون خط $ر ط$ المستقيم الخارج من نقطة $ر$ ممتزعا عن خط $ر و$ وعمودا على $ط و$ وحينئذ يتصور ازالة عمودي $ر و ر ط$ من النقطة $ر$ الواحدة على خط $ط و$

وهذا خلاف فلذا ثبت انهما لا يتوازيان ويتلاقيان في نقطة $ح$ ومن كون نقطة $ح$ هي نقطة واقعة على عمود $د ه$ الخارج من وسط خط $ا - ر$ يكون البعدان من تلك النقطة الى نهايتي خط $ا - ر$ نقطتي $ا و ر$ متساويين وأيضا من كون نقطة $ح$ هي نقطة واقعة على عمود $و د$ الذي أخرج من وسط خط $ر ح$ يكون البعدان من تلك النقطة الى نهايتي خط $ر ح$ وهما نقطتا $ر و ر ح$ متساويين وتكون ابعاد $ح ا و ح ر و ح ر$ الثلاث متساوية فالهبط المرسوم على ان تكون نقطة $ح$ مركزا وبعد $ح ر$ نصف قطر يمر بنقطة $ا و ر$ الثلاث ويثبت المطلوب

تبين لنا و ثبت انه قد يمكن ان يمر محيط دائرة بالثلاث نقط المفروضة التي لم تكن على خط مستقيم ولا يمكن لا يمر محيط آخر دون مامر لانه لو قيل انه يمر بنقطة $ا و ر و ر ح$ المفروضة محيط دائرة آخر يقال فلا بد أن يكون مركز هذا المحيط واقعا على عمود $د ه$ لانه لو كان خارجا من ذلك العمود لكان البعدان من نقطتي $ر و ر ح$ غير متساويين والنقطة الظاهرة عن العمود لا تكون مركزا وبمثل هذا ثبت ان المركز لا يكون خارجا أيضا عن عمود $و د$ ويلزم لذلك المركز ان يكون واقعا على كل من عمودي $د ه و د و$ وحيث ان الخطين المستقيمين لا يتقاطعان الا في نقطة واحدة فقط علم انه لا يكون للعمودين نقطة مشتركة الا نقطة $ح$ ومن ثمة ثبت انه لا يمر من ثلاث نقط المحيط واحدة فقط

المطلوب على ان خط $س$ المذكور مماس
تبيينه لا يمكن رسم خط مماس بالدائرة من نقطة $ا$ الواقعة على المحيط الا خط
 $س$ لانه لو قيل يرسم مماس آخر يقال ان هذا المماس الذي رسم لا يكون عمودا
على نصف قطر $ح$ $ا$ وفي هذا يكون ذلك المماس بالنسبة الى نصف قطر
 $ح$ خطا مائلا والعـمـود النازل من مركز الدائرة على المماس الجديد اصغر
من نصف قطر $ح$ $ا$ فلذا يجب ان يكون الخط الذي قيل انه مماس داخلا
في الدائرة وخطا قاطعا

(الدعوى العاشرة النظرية)

فوساط $ك$ و $ع$ ل المتحصران من المحيط بين خطي $ا$ - و $د$ ه
المتوازيين يكونان متساويين

وهذه الدعوى تكون على ثلاثة احوال

الحال الاول وهو ان يكون الخطان المتوازيان قاطعين المحيط فينثذ اذا رسم
نصف قطر $ح$ عمودا على وتر $ط$ $ع$ أحد المتوازيين يكون عمودا على
وتر $ك$ ل الموازي الآخر فعلى هذا تكون نقطة $ح$ وسطا لقوس
 $ط$ $ع$ و $ك$ $ع$ ل معا ومن هذا يكون قوس $ط$ $ع$ = قوس
 $ح$ $ع$ وقوس $ك$ $ع$ مساويا قوس $ح$ ل فاذا طرحت الاشياء المتساوية من
اشياء متساوية فبقية ما يتكون متساوية ومن ثمة يثبت المطلوب بان يكون $ط$ $ح$
- $ك$ $ع$ = $ح$ $ع$ - $ح$ ل اعني ان قوس $ط$ $ك$ = $ل$ $ع$

الحال الثاني وهو ان يكون احد المتوازيين قاطعا والاخر مماسا فاذا وصل
بين المركز وبين نقطة $ح$ التي هي نقطة تماس بين نصف قطر $ح$ $ع$ فحيث كان
نصف قطر $ح$ $ع$ عمودا على خط $د$ ه المماس يكون عمودا على موازيه
الذي هو وتر $ط$ $ع$ وحيث ان نصف قطر $ح$ $ع$ عمودا على وتر $ط$ $ع$
يقضى ان تكون نقطة $ح$ واقعة في وسط قوس $ط$ $ح$ $ع$ ومن اجل ذلك
يثبت ان قوسي $ط$ $ح$ و $ح$ $ع$ المحصورين بين $ا$ - و $د$ ه المتوازيين
يكونان متساويين

الحال الثالث وهو ان يكون احد المتوازيين مماساً لنقطة ϵ والاخر
في نقطة ϵ فاذا رسم خط α - القاطع موازياً لهما - يذنب المماسين فعلى ما ذكر
في الحال الثاني يكون قوس $\alpha \epsilon =$ قوس $\epsilon \gamma$ وقوس $\alpha \gamma =$
قوس $\epsilon \gamma$ وبهذا يكون قوس $\alpha \epsilon =$ قوس $\epsilon \gamma$ الذي هو الكل $=$ قوس
 $\alpha \gamma$ ويكون كل واحد من هذين القوسين نصف المحيط ويثبت المطلوب
(الدعوى الحادية عشر النظرية)

اذا تقاطع دائرتان في نقطتين فالخط المار بين المركزين يكون عموداً على وتر α -
الواصل بين نقطتي تقاطع الدائرتين ومنصفه لان خط α - الواصل
بين نقطتي التقاطع هو وتر مشترك والعمود الذي يخرج من وسطه ويمر من
الطرفين يمر من كل من المركزين γ و δ ومن حيث انه لا يمكن ان يوصل بين
النقطتين المقروصتين الا بخط مستقيم واحد فقط يلزم ان يكون الخط المار من
المركزين عموداً على وسط الوتر المشترك ويثبت المطلوب
(الدعوى الثانية عشر النظرية)

اذا كان البعد بين مركزي الدائرتين اصغر من مجموع نصف قطريهما وكان نصف
القطر الاكبر اصغر من مجموع نصف القطر الاصغر والبعد بين المركزين تقاطع
هاتان الدائرتان

لانه لا بد لوصول تقاطع الدائرتين ان يمكن رسم مثلث $\alpha \gamma \delta$ ولم يكف
الاثبات بان يكون خط $\gamma \delta$ المستقيم اصغر من مجموع $\alpha \gamma + \alpha \delta$
بل يجب ان يكون نصف القطر الاكبر الذي هو خط $\alpha \delta$ المستقيم اصغر من مجموع
 $\alpha \gamma + \gamma \delta$ فعلى هذا مقي كان رسم المثلث ممكناً فالحيطان المرسومان من
مركزي $\gamma \delta$ يتقاطعان في نقطة α و ϵ ويثبت المطلوب
(الدعوى الثالثة عشر النظرية)

اذا كان بعد $\gamma \delta$ الذي بين المركزين مساوياً لمجموع نصف قطري $\alpha \gamma$ و $\alpha \delta$
تماس هاتان الدائرتان في الخارج بحيث ان $\alpha \gamma$ و $\alpha \delta$ نصف قطري الدائرتين
مساويان لعدد $\gamma \delta$ علم انه لم تكن نقطة مشتركة للانقطة α وماعداها لا تكون

مشتركة لانه لو وجدته نقطة ان مشتركان لكان يمكن رسم مثلث ويكون البعد بين المركزين اصغر من مجموع نصفي القطرين كما صرح به في الدعوى التي تقدمت وهذا خلاف ما فرض فعلى هذا يثبت المطلوب بانه متى كان البعد بين المركزين مساويا لمجموع نصفي القطرين تتماس الدائرتان في الخارج
 * (الدعوى الرابعة عشر النظرية) *

اذا كان بعد $د$ الذي بين مركزي الدائرتين مساويا للتفاضل بين نصفي القطرين $أ$ و $ا$ و $ا$ و $ا$ فتماس هاتان الدائرتان في الداخل لانه لم يكن محيط هاتين الدائرتين نقطة مشتركة الانقطة $ا$ فقط ولم يوجد نقطة مشتركة اخرى لانه لو وجدت نقطة مشتركة اخرى لكان نصف القطر الاكبر اصغر من مجموع نصف قطر $ا$ و $د$ الذي هو البعد بين المركزين وفي هذه الدعوى التفاضل بين نصفي القطرين مساويا للبعد الذي بين المركزين $ا$ و $ا$ نصف القطر الاكبر مساويا لبعد $د$ و $ا$ فعلى هذا لم يكن لهذين المحيطين الانقطة مشتركة فقط ومن هذا ثبت ان هاتين الدائرتين تتماسان في الداخل
 نتيجة الدائرتان المماستان يكون مركزاهما ونقطة تماسهما على خط مستقيم سواء كان التماس في الداخل أو في الخارج

تنبيه كل الدوائر التي مراكزها على خط $د$ ومحيطاتها تمر من نقطة $ا$ تكون مماسة ولم يكن لها نقطة مشتركة الانقطة $ا$ وان اخرج عمود $هـ$ من نقطة $ا$ على خط $د$ المستقيم يكون ذلك العمود مماسا مشتركا لجميع تلك الدوائر
 * (الدعوى الخامسة عشر النظرية) *

في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية اذا كانت الزوايا المركزية متساوية فتكون أقواسها متساوية وبالعكس اذا كانت الأقواس متساوية فتكون زواياها المركزية ايضا متساوية يعني اذا كانت زاوية $ا$ مركزية مساوية لزاوية $د$ $هـ$ الاخرى يكون قوس $ا$ = قوس $د$ وبالعكس اذا كان قوس $ا$ = قوس $د$ تكون زاوية $ا$ المركزية مساوية لزاوية $د$ $هـ$ أولامن كون زاوية $ا$ مساوية لزاوية $د$ $هـ$ يمكن ان يوضع احدى هاتين

الدائرتين على الاخرى بان يكون مركز Γ على مركز Δ ولكون انصاف الاقطار المحيطات بهاتين الزاويتين متساوية تقسم نقطة Λ على نقطة Σ ونقطة Θ على نقطة Ξ فعلى هذا يلزم ان يقع قوس $\Lambda\Theta$ ايضا على قوس $\Xi\Theta$ ويحددان والاسكان في هذين المحيطين فقط على ابعاد غير متساوية من المركز وهذا خلاف لتساوي الدوائر فلذا ينطبق قوس $\Lambda\Theta$ على $\Xi\Theta$ ويساويه ويثبت المطلوب

ثانيا اذا كان قوس $\Lambda\Theta$ مساويا قوس $\Xi\Theta$ فتساوى زاوية $\Lambda\Gamma\Theta$ زاوية $\Xi\Gamma\Theta$ لانه ان لم تكن هاتان الزاويتان متساويتين بان كانت $\Lambda\Gamma\Theta$ اكبر فبقي اخذت زاوية $\Lambda\Gamma\Theta$ مساوية لزاوية $\Xi\Gamma\Theta$ من هذه الزاوية الكبرى فعلى ما صرح به في الشق الاول من هذه الدعوى يكون قوس $\Lambda\Theta$ مساويا قوس $\Xi\Theta$ ولكون قوس $\Lambda\Theta$ مساويا لقوس $\Xi\Theta$ بالعرض يلزم ان يكون قوس $\Lambda\Theta$ مساويا لقوس $\Lambda\Theta$ واذن للزم تساوي الجزء بالكل وهذا خلاف فعلى هذا لا يمكن ان تكون زاوية $\Lambda\Gamma\Theta$ اكبرا واصغر من زاوية $\Xi\Gamma\Theta$ وتساوى الزاويتان ويثبت المطلوب

(الدعوى السادسة عشر النظرية)

اذا كانت النسبة بين زاويتي $\Lambda\Gamma\Theta$ و $\Xi\Gamma\Theta$ المركبتين كالنسبة بين عددين صحيحين في دائرة واحدة او في دوائر متساوية فتكون النسبة بين قوس $\Lambda\Theta$ وقوس $\Xi\Theta$ كالنسبة بين هذين العددين وفي هذا تحدث الاربعة المتناسبة وهي زاوية $\Lambda\Gamma\Theta$: زاوية $\Xi\Gamma\Theta$:: قوس $\Lambda\Theta$: قوس $\Xi\Theta$ فبقي كانت النسبة بين $\Lambda\Gamma\Theta$ و $\Xi\Gamma\Theta$ كالنسبة بين عدد γ وعدد δ الصحيحين او اذا جعلت زاوية Γ مقياسا مشتركا على ان تشتمل في زاوية $\Lambda\Gamma\Theta$ سبع مرات وفي زاوية $\Xi\Gamma\Theta$ اربع مرات ولكون اقسام الزاوياتي $\Lambda\Gamma\Theta$ و $\Xi\Gamma\Theta$ و $\Lambda\Gamma\Theta$ و $\Xi\Gamma\Theta$ و $\Lambda\Gamma\Theta$ و $\Xi\Gamma\Theta$ و $\Lambda\Gamma\Theta$ و $\Xi\Gamma\Theta$ متساوية يلزم ان تكون اقسام الاقواس وهي $\Lambda\Theta$ و $\Xi\Theta$ و $\Lambda\Theta$ و $\Xi\Theta$ و $\Lambda\Theta$ و $\Xi\Theta$ و $\Lambda\Theta$ و $\Xi\Theta$ متساوية فعلى هذا تكون نسبة قوس $\Lambda\Theta$ -

الكامل الى قوس د ه الكامل كنسبة ٧ اء-داد صحيحة الى ٤ اعداد صحيحة ويظهر انه يمكن وضع عدد آخر دون ٧ و ٤ ويثبت بهذه الطريقة فعلى ما ذكره ثبت المطلوب ان النسبة بين قوسى ا ب و د ه كنسبة بين زاويتي ا ب و د ه

نبيه اذا كانت النسبة بين قوسى ا ب و د ه كنسبة بين عددين صحيحين عكس ما تقدم تكون النسبة بين زاويتي ا ب و د ه المركبتين كنسبة بين هذين العددين الصحيحين وحينئذ يكون نسبة ا ب : د ه :: ا ب : د ه لانه متى كانت اقسام الاقواس التى هى ا ب و د ه و د ل و ل ه متساوية تكون اقسام الزوايا وهى ا ب و د و د ل و ل ه ايضا د ل و ل ه متساوية

(الدعوى السابعة عشر النظرية)

دائما النسبة التى بين زاويتي ا ب و ا د ه على اى حالة كانت هى كنسبة بين قوسى ا ب و ا د المرسومين بين انصاف الاقطار المحيطية بتلك الزوايا التى جمعت رؤسها مركزى وضعت الصغرى منهما على الكبرى فان لم يكن للنسب الذى ذكرناه مجلد يعنى ان لم تكن نسبة زاوية ا ب : ا د ه :: قوس ا ب : قوس ا د وكانت كنسبة قوسا كبيرا وصغرا من قوس ا د بان كانت النسبة كنسبة قوس ا ب الى قوس ا د الاكبر من قوس ا د يعنى اذا كانت نسبة زاوية ا ب : ا د ه :: ا ب : ا د فبقسم قوس ا ب اقسام متساوية يكون كل قسم منها اصغر من جزء و د وحينئذ تنقسم نقطة من نقط التقسيم بين نقطى د و د فبما وقعت نقطة التقسيم فى المثل المشار اليه بنقطة ه ووصل خط د ه المستقيم فن حيث ان قوسى ا ب و ا ه منقسمان الى اقسام متساوية فيلزم ان تكون النسبة بين هذين القوسين كنسبة بين عددين صحيحين فعلى ما ذكره فى الدعوى التى تقدمت تكون نسبة ا ب : ا د ه :: ا ب : ا ه ويكون المقدم الاول والثانى من هذا التناسب والتناسب الذى تقدمت مساويين

تكون تواليها متناسبة ويكون نسبة $ا د : ا ه :: او : ا ه$ لكن من خواص الاربعة المتناسبة انه اذا كان الاول اعظم من الثاني لا بد ان يكون الثالث اعظم من الرابع وعلى هذا من $كون قوس او اكبر من قوس ا ه$ ان تكون زاوية $ا د$ اعظم من زاوية $ا ه$ واذا المزم ان يكون الاصغر اعظم من الاكبر وهذا خلف فلذا علم ان نسبة $ا د$ الى $ا ه$ كنسبة قوس $ا د$ الى القوس الذي هو اكبر من قوس $ا د$ ويمثل هذا يثبت ان الرابع المتناسب لم يكن اصغر من قوس $ا د$ ومن ثم يثبت المطلوب بان نسبة زاوية $ا د$: زاوية $ا ه :: قوس ا د : قوس ا ه$

(نتيجة) حيث ان الزاوية المركزية بين القوس المجاوزين طرفيها متناسبة وتعلق لانها لو تزيد أو تنقص على أي نسبة فلا بد ان ذلك القوس يتزايد أو ينقص على مناسج تلك النسبة فمن أجل ذلك يرى ان وضع احد المقدارين لقياس الآخر حقيق فمن ذا نأخذ في ما به $د قوس ا د$ لقياس زاوية $ا د$ الا ان الزوايا التي تقاس بالاقواس حين تقديرها لا بد من ان تكون الاقواس مرسومة بنصف قطر مساو فتأمل لان هذا الفرض ملحوظ في جميع الدعاوي التي تقدمت

(تنبيهان) الاول علم ان قياس المقدار بالمقدار الذي من جنسه أو وفق للطبيع فعلى هذا يمكن تقدير سائر الزوايا بالزاوية القائمة ففى فرض ان الزاوية القائمة احد تعين الزاوية الحادة بالسرا المتمادى بين ١ و ٠ وتقتصر المنفرجة بالعدد المتمادى بين ١ و ٢ ولكون التعيين والتقدير بهذا الطريق لم يكن سهلا وقد ظهر ان تقدير الزوايا باقواس الدوائر موافق للعمل وثابت بالتجربة وان كان تقدير الشئ بغير جنسه ليس بموافق الاصول فلا عسر فى استنباط المقياس الحقيقى بين الزوايا بواسطة تلك الاقواس لانه اذا نظر الى النسبة بين القوس الذي هو مقدار أي زاوية وبين القوس الذي هو ربع المحيط فهي كالنسبة بين تلك الزاوية وبين القائمة فظهر ان القوس يكون مقدارا حقيقيا للزاوية

تنبه ٢ كل ما ثبت في الثلاث دعاوى التي تقدمت من تقدير الزوايا بالاقواس فإنه جار على تقدير القطاع بالقوس لأنه إذا كانت الزوايا متساوية تكون القطاع متساوية وعموما تكون هذه القطاع متناسبة بالزوايا فعلى هذا تكون النسبة بين قطاعي $ا - ح$ و $ا - د$ كالنسبة بين قوسي $ا - و$ و $ا - هـ$ اللذين هما قاعدتان لهذين القطاعين سواء كانا في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية فعلم ان اقواس الدوائر تستعمل في تقدير الزاوية والقطاع

*** (الدعوى الثامنة عشرة النظرية) ***

مقدار زاوية $ا - د$ المرسومة داخل الدائرة هو نصف قوس $د - و$ الواقع بين محيطي تلك الزاوية فإذا فرض ان المركز داخل الزاوية ورسم قطر $ا هـ$ ووصل نصف القطر $ح - و$ و $د - ح$ فزاوية $ح - هـ$ الخارجة عن مثلث $ا - ح - و$ متساوية لمجموع زواياي المثلث وهما $ا - و$ و $ا - ح$ (انظر المقالة الاولى) ولكن مثلث $ا - ح - د$ متساوي الساقين تكون زاوية $ح - هـ$ ضعف زاوية $ا - ح$ وحيث ان قوس $ح - هـ$ هو مقدار الزاوية $ح - هـ$ يكون مقدار زاوية $ا - ح$ نصف قوس $ح - هـ$ وبمثل هذا يثبت ان مقدار زاوية $ا - د$ يكون نصف قوس $د - و$ فلذا يكون مقدار $ا - ح + ح - د$ أو $ا - د$ نصف قوس $د - و$ يعنى نصف قوس $د - و$ ويثبت المطلوب وأما في الصورة الثانية وهي ان يكون مركز $ح$ خارج زاوية $ا - د$ فادرس قطر $ا هـ$ يكون نصف قوس $ب - هـ$ مقدار الزاوية $ا - هـ$ كما صرح به في هذه الدعوى وايضا نصف قوس $د - هـ$ يكون مقدار الزاوية $د - هـ$ فعلى هذا يكون نصف التفاضل بين هذين القوسين وهو نصف قوس $د - ب$ مقدارا زاوية $ا - د$ ومن ثمة يكون مقدار جميع الزوايا المرسومة داخل الدائرة هو نصف الاقواس الواقعة بين محيطيها ويثبت المطلوب

(نتيجة ١) الزوايا الواقعة في قطعة واحدة مثل زاويتي $ا - ح$ و $د - ح$ الخ متساوية لان نصف قوس $ح - د$ يكون مقدار كل واحدة منها

(نتيجة ٢) زاوية $ا - د$ المرسومة في نصف المحيط يكون ربع المحيط مقدارا

لها وإذا أريد اثباتها على وجه آخر نقول إذا وصل نصف قطر $ا ح$ فمن كون
 مثلث $ا ح$ متساوي الساقين $تكون زاوية ا ح$ مساوية لزاوية
 $ا ح$ وأيضا من كون مثلث $ا ح$ متساوي الساقين تكون زاوية $ا ح$
 مساوية لزاوية $ا ح$ وحيث انه إذا اجتمعت هذه الاشياء المتساوية تكون
 الحواصل متساوية فيكون $ا ح + ا ح$ أو $ا ح = ا ح + ا ح$
 ا ح فعلى هذا مجموع $ا ح$ و $ا ح$ زاويتى مثلث $ا ح$ يكون
 مساويا لزاوية $ا ح$ أو مجموع الزوايا الثلاث في المثلث مساو لضعف زاوية
 $ا ح$

(نتيجة ٣) الزوايا التي مثل زاوية $ا ح$ الواقعة في قطعة اكبر من نصف المحيط
 تكون حادة لان نصف قوس $ا ح$ الاصغر من نصف المحيط يكون مقدارا
 لها أو أيضا الزوايا التي مثل $ا ح$ الواقعة في قطعة اصغر من نصف المحيط
 تكون منفرجة لان مقدارها هو نصف القوس الاكبر من نصف المحيط

(نتيجة ٤) مجموع الزاويتين المتقابلتين من $ا ح$ ذي أربعة اضلاع المرسوم
 داخل الدائرة اللتين هما $ا و$ يكون مساويا قائمتين لان نصف قوس
 $ا ح$ يكون مقدار الزاوية $ا ح$ ونصف قوس $ا ح$ هو مقدار $ا ح$
 فعلى هذا يكون نصف المحيط مقدار المجموع زاويتي $ا ح + ا ح$ ومن ثمة
 يكون مجموع الزاويتين المتقابلتين مساويا قائمتين

(الدعوى التاسعة عشرة النظرية)

(شكل ٦٩) نصف قوس $ا ح$ الواقع بين محيطى زاوية $ا ح$ الحاصلة من
 الوتر والخط المماس يكون مقدارها فاذا رسم قطر $ا ح$ من $ا$ نقطة التماس
 فذلك القطر يكون عمودا على الخط المماس ولذا تكون زاوية $ا ح$ قائمة
 وبهذا يكون $ا ح$ نصف المحيط مقدار تلك الزاوية ويكون نصف
 قوس $ا ح$ مقدار الزاوية $ا ح$ فعلى هذا يظهر ان نصف قوس $ا ح$
 ونصف قوس $ا ح$ يعنى نصف قوس $ا ح$ يكون مقدار الزاوية $ا ح$
 $+ ا ح$ ا ح زاوية $ا ح$ ومن ثمة يكون مقدار الزاوية $ا ح$

هو نصف قوس α الواقع بين محيطيها

(الدعوى العملية المتعلقة بالمقالة الاولى والثانية)

(الدعوى الاولى العملية)

(شكل ٧٠) طريقة تصنيف خط a - المستقيم المحدود قبضعل نقطة a و - مركز زاوية α كبر من نصف خط a - يرسم قوسان متقاطعان في نقطة γ بأن تكون نقطة γ على ابعاد متساوية من نقطتي a و - وكذا تعين نقطة δ يرسم قوسين تحت خط a وتكون ايضا نقطة δ على ابعاد متساوية من نقطتي a و - فاذا وصل خط $\gamma\delta$ بين نقطتي γ و δ فالخط الموصول يقطع خط a وينصفه لانه من كون كل واحدة من نقطتي γ و δ على ابعاد متساوية من نقطتي a و - يلزم ان يكونا واقعتين على العمود الخارج من وسط خط a وحيث انه لا يمكن الاوصل خط مستقيم بين نقطتي γ و δ فيكون خط $\gamma\delta$ هو العمود المذكور وينقسم خط a في نقطة ϵ الى قسمين متساويين ويثبت المطلوب

(الدعوى الثانية العملية)

(شكل ٧١) طريقة اخراج عمود من نقطة a الواقعة على خط $\gamma\delta$ المقروض

تعين نقطتا γ و δ على ان تكونا على ابعاد متساوية من نقطة a ثم تجعل نقطة γ و δ مركزا ونصف قطر α كبر من بعد a يرسم قوسان متقاطعان في نقطة γ فاذا وصل خط $\gamma\delta$ يكون هو العمود المطلوب لان نقطة γ على ابعاد متساوية من نقطتي γ و δ فتكون واقعة على العمود الخارج من وسط خط $\gamma\delta$ ومن ثمة كان خط $\gamma\delta$ هو العمود المذكور

تنبيه اعلم ان انشاء زاوية α القائمة على خط $\gamma\delta$ من نقطة a

يكون كما ذكر

(الدعوى الثالثة العملية)

(شكل ٧٢) طريقة انزال عمود على خط $س د$ المستقيم من نقطة $ا$ خارجة عنه

تجعل نقطة $ا$ مركزا ويرسم قوس بنصف قطر كافى ان يقطع خط $س د$ في نقطتي $س و$ ثم تجعل نقطة $س و$ مركزا وتعين نقطة $هـ$ برسم قوسين متقاطعين ويوصل خط $ا هـ$ فالخط الموصول هو العمود المطلوب لان $كلا$ من نقطتي $ا و هـ$ على ابعاد متساوية من نقطتي $س و$ ويكون خط $ا هـ$ هو العمود الخارج من وسط خط $س د$ ويثبت المطلوب

(الدعوى الرابعة العملية)

(شكل ٧٣) طريقة انشاء زاوية مساوية لزاوية $د$ من $ا$ أحسن نقط خط $ا -$

تجعل $ا$ نقطة الرأس مركزا وبأى نصف قطر كان يرسم قوس $و هـ$ ويعين محيطا زاوية $د$ ثم تجعل نقطة $ا$ مركزا ويرسم قوس غير محدود $س ح$ بنصف القطر المساوي خط $د هـ$ ويوصل وتر $هـ و$ وتجعل نقطة $س ح$ مركزا ونصف قطر مساو لوتر $هـ و$ يرسم قوس يقطع قوس $س ح$ في نقطة $ح$ فاذا وصل خط $ا ح$ فزاوية $س ا ح$ الحادثة تكون مساوية لزاوية $د$ المقروضة لانه اذا وصل وتر $س ح$ فثبت ان قوس $س ح و هـ$ استدارا بنصف أقطار متساوية ووتر $ا هـ و$ متساويان وأقواس الاوتار المتساوية الواقعة في الدوائر المتساوية تكون متساوية فلذا تتساوى زاوية $س ا ح و هـ د$ لتساوى قوس $س ح و هـ د$ اللذان هما معياران لتلك الزاويتين ويثبت المطلوب

(الدعوى الخامسة العملية)

(شكل ٧٤) طريقة تقسيم قوس معلوم أوزاوية مفروضة الى قسمين متساويين أولا اذا أريد تقسيم قوس α بمساويين فجعل نقطة α و α مركزا وب نصف قطر واحد يرسم قوسان متقاطعان في نقطة γ فاذا وصل بين نقطتي γ و δ بخط δ المستقيم فكل نقطة من نقطتي γ و δ تكون على ابعاد متساوية من α و β نهايتي الوتر المذكور ومن ثمة يكون خط δ الموصل هو العود الخارج من وسط الوتر المذكور ويقسم قوس α في نقطة δ الى قسمين متساويين (انظر المقالة الثانية)

وثانيا اذا أريد تقسيم زاوية α الى قسمين متساويين فجعل δ رأس تلك الزاوية مركزا ويرسم قوس α ثم اذا أجريت العمليات كما ذكرنا سابقا فخط δ يقسم زاوية α الى قسمين متساويين لكونه قسم قوس α الذي هو مقدارها فعلى هذه الطريقة التي ذكرت يمكن انقسام كل واحد من قوسي α و β وأجزائهما على التوالي الى قسمين متساويين وكذلك يكون تقسيم أي زاوية مفروضة أو قوس معلوم الى أقسام متساوية

(الدعوى السادسة العملية)

(شكل ٧٥) طريقة رسم خط مواز لخط δ المعلوم يمر من نقطة α المفروضة

فجعل نقطة α مركزا وب نصف قطره مقدار δ كافي يرسم قوس هو γ غير محدود ويجعل نقطة δ مركزا وب نصف القطر المذكور يرسم قوس α و β وبخذا قوس δ مساويا لقوس α فاذا وصلت نقطتي α و γ بخط مستقيم فان خط الموصل هو الموازي المطلوب لانه اذا وصل α و δ فلتساوى قوس α و β المرسومين بنصف قطر واحد يلزم تساوى الزاويتين اللتين مقدارهما القوسان المذكوران ومن تساوى الزاويتين المتبادلتين يكون خط α موازيا لخط δ (انظر المقالة الاولى) ويثبت المطلوب

(الدعوى السابعة العملية)

(شكل ٧٦) طريقة تعيين الزاوية الثالثة من المثلث اذا كانت زاويتا
ا و - معلومتين

يرسم خط د ه المستقيم غير محدود ومن نقطة ه الواقعة عليه اذ رسمت
زاوية د ه ح مساوية لزاوية ا وزاوية ح ه ر مساوية لزاوية -
فتكون زاوية ر ه و مساوية للزاوية الثالثة المطلوبة من المثلث لان تلك
الزاويا الثلاث مساوية لقائمتين وكذا اثلاثة زوايا المثلث في تساوي الزاويتين
القائمتين تتساوى الزاويتان الثالثتان ويثبت المطلوب

(الدعوى الثامنة العملية)

(شكل ٧٧) طريقة رسم مثلث علم ضلعا - و ح وزاوية ا التي
بينهما

يرسم خط د و المستقيم غير محدود ومن نقطة د ترسم زاوية د و ه
مساوية لزاوية ا المعلومة ويؤخذ د ر مساويا لضع - و ع
مساويا لضع ح فاذا وصل ع ر فمثلث ع د و هو المثلث المطلوب لان
ضلعيه والزاوية التي بينهما انشئت مساوية بالعمل لضع - و ح وزاوية ا
(الدعوى التاسعة العملية)

طريقة رسم مثلث علم منه ضلع وزاويتان

فاعلم انه اما ان يكون كلا الزاويتين مجاورا للضلع المعلوم واما ان تكون احدهما
مجاورة والاخرى مقابلة فان كانت بالصورة الثانية تستخرج الزاوية الثالثة
من المثلث على ما ذكر في الدعوى السابعة وحين تعلم الزاويتان المجاورتان
لذلك الضلع يعمل كما سيأتي

(شكل ٧٨) يرسم خط د ه المستقيم مساويا للضلع المعلوم ومن نقطة د
ترسم زاوية ه د و مساوية لحدى المتجاورتين ومن نقطة ه ترسم
زاوية د ه ر مساوية لاحدهما الاخرى فيتقاطع خطا د و و ه ر

في نقطة γ ويكون مثلث $\gamma\delta\epsilon$ الحادث هو المثلث المطلوب
 * (الدعوى العاشرة العملية) *

(شكل ٧٩) طريقة رسم مثلث اذا كانت اضلاعه الثلاثة α و β و γ
 معلومة

يرسم خط $\delta\epsilon$ مساويا لاضلع α ثم تجعل نقطة δ مركزا ويرسم قوس
 بنصف قطر مساو لاضلع β ويرسم قوس من نقطة ϵ بنصف قطر مساو
 لاضلع γ يقطع القوس الاول في نقطة فاذا وصل خط $\delta\epsilon$ و $\delta\alpha$ وهما ثلثات
 وهو الحادث هو المثلث المطلوب

تنبيه اذا كان أحد تلك الاضلاع α أكبر من مجموع الاخرين فالقوسان
 لا يتقاطعان وأما اذا كان مجموع كل ضلعين أكبر من الضلع الآخر فدايكون
 اجراء العمل ممكنا

* (الدعوى الحادية عشرة العملية) *

(شكل ٨٠) طريقة رسم مثلث علم منه ضلعان α و β وزاوية γ
 المقابلة لاضلع β وهذه الدعوى على وجهين

الوجه الاول هو ان تكون زاوية γ قائمة أو منفرجة فتتأثر زاوية δ وهو
 مساوية لزاوية ϵ ويؤخذ خط $\delta\epsilon$ مساويا لاضلع α وتجعل نقطة δ
 مركزا وبنصف قطر مساو لاضلع β و يقطع ضلع $\delta\epsilon$ هو في نقطة ويرسم قوس
 فاذا وصل خط $\delta\epsilon$ وهما ثلثات وهو الحادث هو المثلث المطلوب

العلم ان في هذا الوجه الاول لا بد أن يكون ضلع β أكبر من ضلع α
 لان زاوية γ متى كانت قائمة أو منفرجة فلا بد لاضلع المثلث المقابل لها ان
 يكون أكبر

(شكل ٨١) الوجه الثاني هو ان تكون زاوية γ حادة وضلع β أكبر من
 α فحينئذ اذا أجرى العمل كما صرح به في الوجه الاول فيرسم مثلث $\delta\epsilon\alpha$ وهو
 ويكون المثلث المطلوب

(شكل ٨٢) وأما اذا كانت زاوية γ حادة وكان ضلع β أصغر من ضلع α

فالقوس المرسوم في نقطة هـ بنصف قطر هـ و المساوي لضلع -
 يقطع ضلع د و في نقطتي و و ر وتكون كل واحدة من هاتين النقطتين
 واقعة على نقطة د فاذا وصل خطا هـ و هـ ر فكل من مثلثي
 د هـ و و د هـ ر الحادئين يوافق المطلوب

تنبيه اذا كان في المثلث ضلع - أصغر من العمود النازل من رأس هـ
 على قاعدة د و لا يمكن اجراء العمل المذكور بوجه من الوجوه
 * (الدعوى الثانية عشرة العملية) *

(شكل ٨٣) طريقة رسم متوازي الاضلاع الذي علم منه ضلعا ا و -
 المتجاوران وزاوية ح التي بينهما

في رسم خط هـ د مساويا لضلع ا ومن نقطة د ترسم زاوية و د هـ
 مساوية لزاوية ح ويؤخذ خط د و مساويا لضلع - وتجبـل
 نقطة و مركزا ويبعد د هـ يرسم قوس وأيضا تجبل نقطة هـ مركزا
 ويبعد د و يرسم قوس آخر يقطع القوس الاول في نقطة ر فاذا وصل
 هـ ر و و ر فشكل د هـ ر و هو متوازي الاضلاع المطلوب

لانه يلزم من تساوي الاضلاع المتقابلة فيه بالعمل ان يكون ذلك الشكل
 متوازي الاضلاع (انظر مقالة ا) وحيث ان اضلاعه وزواياه تساوي
 بالعمل الضلعين المعلومين والزاوية المفروضة يكون ذلك الشكل هو المتوازي
 الاضلاع المطلوب

(نتيجة) اذا كانت الزاوية المعلومة المفروضة قائمة وكان الضلعان المتجاوران مختلفين
 يكون ذلك الشكل مستطيلا واذا تساوى الضلعان مع قيامهما يكون مربعا
 * (الدعوى الثالثة عشرة العملية) *

طريقة تعيين المركز الجوهول لدائرة مفروضة أو قوس معلوم

(شكل ٨٤) فـ هـ يـ ن ثلاث نقاط ا و - و ح كيفما اتفق
 على المحيط المفروض أو القوس المعلوم ويوصل أويتوهم وصل وترى
 ا - و ح ثم ينصف هـ ذان الوزان بعمودي د هـ و و ر

فنقطة ح التي هي تقاطع العمودين المذكورين هي المركز المطلوب
لان كل واحد من هذين العمودين يمر بالمركز فمن هذا يظهر ان نقطة ح
التقاطع المشترك هي المركز المطلوب

تنبيه طريقة رسم دائرة تمر من ثلاث نقط مفروضة مثل ا - ب - و
كطريقة رسم دائرة على مثلث ا - ب - كما صرح به

(الدعوى الرابعة عشرة العملية)

طريقة رسم خط مماس لدائرة معاومة من نقطة مفروضة

(شكل ٨٥) اذا كانت نقطة ا المفروضة واقعة على محيط الدائرة يرسم
نصف قطر ا ح فاذا اخرج عمود اء على النصف قطر المذكور من نقطة
ا فهذا العمود هو المماس المطلوب

(شكل ٨٦) واذا كانت نقطة ا واقعة خارج الدائرة كما يرى من هذا
الشكل يوصل بين نقطة ا وبين مركز الدائرة بنقط ا ح المستقيم وينصف
خط ا ح المذكور في نقطة ح ويجعل نقطة ح مركزا ويعد ا ح
يرسم محيط دائرة فاذا وصل خط ا ب المستقيم بين نقطة ا ونقطة
ب التي هي تقاطع المحيط المرسوم بمحيط الدائرة المفروضة بنقط ا - ب
هو المماس المطلوب

لانه اذا وصل ج - ب فزاوية ج - ب - ا الحادة تكون قائمة لوقوعها
في نصف الدائرة فلذا خط ا - ب يكون مماسا بكونه عمودا على تمابه نصف
قطر - ب

تنبيه اء انه متى كانت نقطة ا المفروضة واقعة خارج الدائرة يمكن ان يرسم
منها خطان مماسان للدائرة المذكورة وهما ا - ب و اء ويكونان
متساويين لان في مثلثي ج - ا - ب و ج - اء - ب القاعى الزاوية وتر ا ح مشترك
وضاىي ج - ب و ج - ب متساويان لكونهما انصاف اقطار
فن تساوى هذين المثلثين يكون اء = ا - ب وحينئذ تكون زاوية
ج اء مساوية لزاوية ج ا - ب

* (الدعوى الخامسة عشرة العملية) *

(شكل ٨٧) طريقة رسم دائرة داخل مثلث $ا - ب - ج$ المقروض تتماس بأضلاعها الثلاثة

فأقول إذا نصقت زاويتي $ا$ و $ب$ من المثلث المذكور بخطى $ا ح$ و $ب ح$ فهذان الخطان يتقاطعان في نقطة $ح$ ومن نقطة $ح$ إذا أنزلت عماد $ح د$ و $ح هـ$ و $ح و$ على ثلاثة أضلاع المثلث فهذه العموديات تكون متساوية لأن زاويتي $ا ح د$ و $ب ح هـ$ متساويتان بالعمل وزاويتي $ا د ح$ و $ا و ج$ أيضاً متساويتان لقيامهما بقضي زاوية $ا ح د$ الثالثة مساوية كذلك لزاوية $ا ح و$ ولأشتر الأضلاع $ا ح$ في مثلثي $ا ح د$ و $ا ح و$ ولتساوي مثنى الزوايا المجاورة له فيكون المثلثان المذكوران متساويين ولذا يكون $ح د = ح و$ وبمثل هذا ثبت أن مثلثي $ب ح د$ و $ب ح هـ$ أيضاً متساويان ويكون $ح د = ح هـ$ فعلى هذا تكون أعمدة $ح د$ و $ح و$ و $ح هـ$ متساوية فإذا جعلت نقطة $ح$ مركزاً ونصف قطر $ح د$ رسم محيط دائرة فهذا المحيط يكون هو المحيط المرسوم داخل مثلث $ا - ب - ج$ المماس لأضلاعه الثلاثة لأن ضلع $ا - ب$ هو العمود الخارج من نهاية نصف قطر $ح د$ ومن هـذا يـكون مماساً لتلك الدائرة وكذلك ضلعا $ب - ج$ و $ا - ج$ يكونان مماسين كما تقدم وقد يكون تلك الدائرة المرسومة مماسة لأضلاعه الثلاثة وبهذا يثبت المطلوب

تنبيه الثلاثة خطوط التي تنصف ثلاث زوايا مثلث لا بد أن تتلاقى في نقطة واحدة

* (الدعوى السادسة عشرة العملية) *

(شكل ٨٨ و ٨٩) طريقة رسم قطعة دائرة على خط $ا - ب$ المستقيم المقروض تكون قابلاً للاحاطة زاوية $ج$ المعلومة يعنى المطلوب رسم قطعة دائرة تكون كل زاوية مرسومة في تلك القطعة مساوية لزاوية $ج$ المقروضة

فأقول يخط α - المستقيم بجهة - ومن نقطة - ترسم زاوية
 δ - مساوية لزاوية γ المقروضة ويقام عمود ϵ على خط δ -
 وعمود ζ على وسط خط α فنقطة ϵ التي هي تقاطع العمودين
 تجعل مركزا ونصف قطر ϵ - ترسم دائرة فقطعة هذه الدائرة وهي α -
 هي القطعة المطلوبة

لان خط δ - المستقيم بجهة - وحيث ان خط δ - وعمود يخرج من
 نهاية نصف قطر ϵ - يكون مماسا للدائرة ويكون نصف قوس α -
 مقدارا لزاوية α - و

وحيث ان نصف قوس α - صار معيار الزاوية α - وهي
 محيطية ظهر انها مساوية لزاوية α - أو مساوية لها δ - والمعنى
 ان زاوية α - مساوية لزاوية γ المقروضة ومن ثمة ثبت المطلوب
 وهو ان جميع الزوايا المرسومة في قطعة α - تكون مساوية لزاوية
 γ المقروضة

تنبيه اذا كانت الزاوية المقروضة قائمة فالقطعة المطلوبة تكون هي نصف
 الدائرة المرسومة على قطر α -

(الدعوى السابعة عشرة العملية)

(شكل ٩٠) طريقة استخراج عدد تناسب الخطين المستقيمين المقروضين

α - و δ - بينهما مقياس مشترك
 أولا يوضع خط γ - الاصغر على خط α - الاكبر ثم تعين مقدار عدد اشتغال
 الخط الاكبر على خط γ - الاصغر فان اشتغل عليه مرتين وبقي δ - فضله
 توضع على خط γ - فاذا اشتغل γ - عليها مرتين وبقيت فضله δ - توضع
 هذه الفضلة على فضله δ -

فاذا اشتملت δ - عليها مرة واحدة وبقيت δ - وتوضع δ - وهي الفضلة
 الثانية على δ - وهي الفضلة الاولى فاذا اشتملت عليها مرة واحدة وبقيت
 δ - فضله توضع هذه الفضلة الثالثة وهي δ - على الفضلة الثانية وهي

د و جعين كم اشتغالها عليهما وأيضا اذا وضعت الفضلة الباقية على الفضلة السابقة وهكذا حتى اشتملت السابقة على الباقية بقامها تكون هذه الفضلة الاخيرة مقياسا مشتركا للخطين المستقيمين المقروضين فاذا جعلت تلك الفضلة الاخيرة كواحد تقدر بها قيمة الفضلات التي تقدمت وقيمة الخطين المقروضين ويتعين من هذا التقدير نسبة تعدد الخطين المذكورين

مثلا اذا كانت فضلة د ر الاخيرة تشتمل عليهما د و مرتين تكون مقياسا مشتركا للخطين المقروضين

مثلا اذا فرض ان د = ١ يكون د و = ٢ لكن فضلة د و اشتملت عليهما فضلة هـ مرة وبقيت د فضلة فتكون هـ = ٣ وحيث ان هـ اشتمل عليها خط د مرة وبقيت د فضلة يكون د = ٥

واخيرا حيث ان خط د احتواه خط ا مرتين وبقيت هـ فضلة يكون ا = ١٣ ومن ثمة يظهر ان النسبة بين خطي ا و د كالنسبة بين عددي ١٣ و ٥ فاذا كان خط د واحدا فنسبته اليه تكون $\frac{13}{5}$

واذا كان خط ا واحدا يكون خط د = $\frac{5}{13}$ تنبيه هذه العمليات التي أجريت في هذه الدعوى هي عين العمليات التي أجريت في استخراج القاسم المشترك الاعظم فلا حاجة الى بسط اثبات آخر في هذا المقام

وتارة يجري العمل متواليا والفضلة الاخيرة لم يمكن ان تشتمل عليهما التي قبلها اشتمالا تاما واذا يستدل ان لامقياس مشترك بين هذين الخطين وكل يسمى اسم كما بين ضلع المربع وقطره وسيدكر ان شاء الله تعالى بحته ولا توجد بينهما نسبة حقيقية وانما يجري العمل مهما أمكن حتى تصير الفضلة الاخيرة أدنى جزء لا يعاب به واذا تكون النسبة بينهما تقر بنية تكاد ان تكون حقيقية

(الدعوى الثامنة عشرة العملية)*

(شكل ٩١) طريق استخراج المقياس المشترك بين زاويتي ١ و ٢
 ان كان بينهما مقياس مشترك وبه يوجد عدد تناسب هاتين الزاويتين
 فاذا جعلت رأس الزاويتين مركزا ورسم قوسا γ و δ هو بانصاف أقطار
 متساوية فهذان القوسان γ و δ يكونان مقدارين لهما ثم يقدر القوسان
 كما صرح به في الدعوى التي تقدمت لانه يمكن تطبيق الاقواس المتساوية
 أنصاف الاقطار كتطبيق أحد المستقيمين على الآخر كما لا يخفى وبهذا العمل
 يحصل المقياس المشترك بين قوسى γ و δ هو . ان كان موجودا
 وتوجد نسبة تعداد القوسين وهى عين ما بين الزاويتين وان كان قوس
 γ مقياسا مشتركا بين قوسى γ و δ هو فزاوية γ تكون
 معيار الزاويتين وهو الظاهر
 تنبيه بهذا يمكن تعيين مقدار زاوية بتقدير القوس الذى هو معيارها مع المحيط
 الكامل مثلا اذا كانت نسبة قوس γ الى المحيط كنسبة عدد ٣
 الى عدد ٢٥ يكون مقدار زاوية $\gamma = \frac{3}{25}$ من أربع قوائم او $=$
 $\frac{12}{100}$ من قائمة وثلاثة لا يوجد المقياس المشترك بين الزاويتين وحينئذ يجرى
 العمل على التوالي حتى ننمى الى نسبة تقريرية تكاد ان تكون حقيقية
 كما تقدم وهذا ظاهر

(تت المقالة الثانية)

المقالة الثالثة

في خصوصية تناسب الاشكال

المحدود

١ الاشكال المتساوية مساحة تسمى اشكالا متكافئة أو متقاومة مثلا قديمين تكافؤ الشكلين مساحة وان كانا مختلفي الهيئة مثلا يمكن ان تكافؤ الدائرة مربعاً والمثلث مستطيلاً وهكذا الخ

فالاشكال المتساوية كالدوائر المتساوية انصاف الاقطار والمثلثات المتساوية الاضلاع المتناظرة أعني الاشكال التي اذا وضع أحدها على الآخر تنطبق كل نقطة على نظيرتها كمال الانطباق تسمى أشكالا متساوية من باب أولى

٢ اذا تساوت الزوايا المتناظرة من شكلين وتناسبت الاضلاع فهذان الشكلان يسميان متشابهين والاضلاع المتناظرة تطلق على الاضلاع المتبعة في الوضع أعني الاضلاع التي تحيط بالزوايا المتساوية وهي ما يسمى زوايا متناظرة

كل شكلين متساويين فهو متشابهان واما الاشكال المتشابهة فتارة لا يكون بينهما شيء من المساواة أصلاً فن هذا علم ان كل شكلين متساويين متشابهان ولا عكس

٣ الاقواس المتشابهة والقطع المتشابهة والقطوع المتشابهة في الدوائر المختلفة أعني غير المتساوية تطلق على الاقواس والقطع والقطوع التي تقابل الزوايا المركزية المتساوية

(شكل ٩٢) مثلا اذا سارت زاوية د زاوية ا ف قوس د ح

يشابه قوس د ه وقطاع ا ح يشابه قطاع د ه وهكذا الخ

٤ (شكل ٩٣) ارتفاع الشكل المتوازي الاضلاع هو عود د ه و

من المتقنين كالسدس وغيره وكثير من المثلثات استعمالوا القطر المتساوية في مطابق الاشكال المتساوية السطوح وان كانا ذكرنا في تأليفهم ان تقاطع المثلث حمرار الدائرة مستطلاً لا يلائم تقاطع هذا الشكل على مثلث لفظ المساواة في الاشكال الممكنة التي نرى من ذلك بها واما الاشكال المتساوية مساحة فسميت عند شكلين متقاومة في هذه الترجمة سلبت الفرض على الطرفين الموافق لزاوية التقاطع فسميت الاشكال المتشابهة تطبيقها على المتشابهة والتي لا يمكن ان يتطابق اتحاد مقدار الاشكال أو متقاومة

اعني البعد الحقيقي بين ضلعي $ا$ و $د$ المتقابلين الذين كل منهما يسوي قاعدة

٥ (شكل ٩٤) ارتفاع المثلث هو عود $ا$ و $د$ النازل من $ا$ رأس المثلث على ضلعه $د$ المقابل لها الذي يسمى قاعدة

٦ (شكل ٩٥) ارتفاع شبه المنحرف هو عود $هـ$ و $و$ المحصور بين ضلعي $ا$ و $د$ المتوازيين

٧ مساحة الشكل وسطحه بمعنى واحد تقريرا غير ان لفظ المساحة يطلق على سعة وجه شكل أو يستعمل في تقدير سطح الشكل بسطح شكل آخر

اعلم ان معرفة هذه المقالة والمقالات الآتية وادراكها كما ينبغي يتوقف على معرفة أصول النسبة والتناسب فيلزم التأمل وصرف الذهن في ادراك أصول حقيقة التناسب وينبغي ترك المهملات والمشكلات التي تعرض في التقرير والتلفظ من أجل ذلك كان ايضاح الملاحظات التي يحتاج اليها عند صرف الذهن من باب أولى وان لزمت مراجعة الكتب الجبرية

مثلا اذا تناسبت هذه المقادير الاربع $ا : ب :: ج : د$ يعلم ان حاصل ضرب طرفي $ا$ و $د$ يساوي حاصل ضرب وسطى $ب$ و $ج$ ولا يرب في هذا كما صرح به في قواعد علم الحساب وكل جسم أو مقدار يتعين أو يتصور في الذهن تعينه باعداد ويمكن ان يفرض ذلك في كل وقت مثلا اذا كانت مقادير $ا$ و $ب$ و $ج$ و $د$ خطوطا وكان احد هذه الخطوط أو خط خامس آخر واحدا لها ومقياسا مشتركا بين كافة تلك الخطوط يظهر عددهم من قياسها بذلك الواحد سواء كان كل واحد من خطوط $ا$ و $ب$ و $ج$ و $د$ صحيحا أو كسرا منطوقا أو أصم فعلم ان النسبة بين هذه الخطوط تجري مجرى النسبة التي بين الاعداد الحسابية العادية فيقال لحاصل ضرب خطي $ا$ و $د$ مستطيل $ا د$ من أجل ذلك كان مستطيل $ا د$ بمعنى المستطيل الذي يحصل من العدد المستطيل

عليه خط ١ بضربه في العدد الذي يشقل عليه خط ٤ ويسهل علينا بطريق مستقيم كما هو

وهو ان مستطيل اء يساوى مستطيل بء ويعلم ان ١ و ٤ من جنس واحد مثلاً اذا كانا من جنس الخط وكان مقدار ٢ و ٤ من جنس السطح فينظر الى الجميع كالاعداد الحسابية

فاذا كان مقدارا ١ و ٤ معينين بالاحد الخطي فيعين مقدار ٢ و ٤ بالاحد السطحي وفيه يكون ما نتج منها عدداً مثل حاصل ١ × ٤ وحاصل ٢ × ٤ وعوماً في جميع العمليات التي تجري بطريق النسبة والتناسب يلزم دائماً ان ينظر اليها مثل اعداد كل جنس يوافق تلك النسبة وحدودها ولا عسر في تصويره ولا في النظر فيما يحصل منه ولا في اجراء عمله أبداً

ولا يخفى انه تارة يبنى على القواعد السهلة من علم الجبر في اثبات دعاوى هذه الهندسة وهذا ما سنده الى البدئية أعني العلوم المتعارفة فاستحسن ذلك القواعد في هذا المحل مثلاً اذا كان ١ = ٢ + ٣ وضرب كل من طرفي هذه المساواة في ٤ فيظهر ٤ × ١ = ٤ × ٢ + ٤ × ٣ وأيضاً اذا كان ١ = ٢ + ٣ و ٤ = ٥ - ٦ واجتمعت اطراف هذه المساواة فيكون ١ + ٤ = ٢ + ٣ + ٥ - ٦

هـ - فان حذفت المقدارين المتحدين عينا المختلفين علامة الواقعين في احدى طرفي المساواة يكون ١ + ٤ = ٢ + ٣ + ٥ - ٦ وقس على هذا ولكن الاحسن انه حين تقرأ الهندسة ينظر الى علم الجبر كلما يحتاج اليه القارئ والاولى انهم ما يدركون ما لم يقيموا من المنافع والتوافق الذي بينهم ما لان تطبيق الجبر على الهندسة هو من أنفس الفنون وأشد ما يحتاج اليه عند التحصيل الطالبون ومتعجب من هذا الكتاب من الفرنسي الى التركي حضرة الجبر الاعظم واستاذنا الاكرم ميرالوا ادهم بك لما صدرت مطابعه العلمية كتاب الجبر الذي هو تأليف المهندس رنو وهو من كتب الجبر التي تدرس

بارض فرانسس وأعظم ديارها وهو مستقل على جلدين أحدهما يسمى بالجلد
الاول والاخر يسمى بالجلد الثاني فوجده كثير المنافع فاهم بترجمته من
الفرنساوى الى العربى وان شاء الله تعالى تيسر ترجمته من العربى الى التركى ليعم
نفعه جميع اهالى ملتنا الاحمدية على صاحبها أفضل الصلاة والتحية وما توفيقى
الا بالله وبه تقى

(الدعوى الاولى النظرية)

الاشكال المتوازية الاضلاع المتساوية القاعدة والارتفاع تكون متكافئة
مثلا (شكل ٩٦) فى المتوازي الاضلاع $ا ب د ه$ و $ا ب ه و$ خط $ا$
قاعدة مشتركة ولتساوى ارتفاعه ما بالقرص توجد قواعدهما العليا
التي هي $د ه$ و $ه و$ على خط مستقيم واحد مواز لخط $ا ب$ ولتساوى
الاضلاع المتقابلة فى الشكل المتوازي الاضلاع يكون $ا د = ب ه$
و $ا و = ب ه$ وكذلك من كون $د ه = ا ب$ و $ه و = ا ب$
فيكون $د ه = ب ه$ فان أضفنا $ه و$ على كل من خطي
 $د ه$ و $ه و$ المتساويين بصير $د ه و$ $د و$ متساويين فعلى هذا
تكون اضلاع مثلثي $د ا و$ و $ب ه د$ الثلاثة متساوية ويكون
المثلثان المذكوران متساويين (شكل ٩٦) فعلم انه اذا طرح من
 $ا د ه$ الشكل ذى أربعة اضلاع مثلث $ا د ه$ يبقى المتوازي الاضلاع
 $ا ب ه و$ ومنه اذا طرح ايضا مثلث $ب ه د$ يبقى المتوازي الاضلاع $ا ب د ه$
ولتساوى البواقي من الاشياء المتساوية اذا طرح منها اشياء متساوية
ظهر ان شكلي $ا ب د ه$ و $ا ب ه و$ المتوازي الاضلاع المتهدى القاعدة
والارتفاع يكونان متقاومين

(نتيجة) (شكل ٩٧) متى اتحدت قاعدة متوازي الاضلاع $ا ب د ه$ ومستطيل
 $ا ب ه و$ وارتفاعهما يكونان متكافئين

(الدعوى الثانية النظرية)

اذا كانت القاعدة والارتفاع متساوية فى مثلث $ا ب د$ ومتوازي

الاضلاع ا-د (شكل ٩٨) فيكون المثلث نصف متوازي الاضلاع لان
مثلث ا-د مساو لمثلث ا-د

(نتيجة ١) مثلث ا-د الواقع على قاعدة د-ه ونصف مستطيل د-ه هو
لانه يقاوم متوازي الاضلاع ا-د
(نتيجة ٢) جميع المثلثات المتساوية القواعد والارتفاعات تكون متكافئة

(الدعوى الثالثة النظرية)

المستطيلان المتحدان الارتفاع النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما
مثلا (شكل ٩٩) مستطيل ا-د و ا-ه وى المشترك فيهما
ارتفاع اء تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما ا-د و ا-ه
فلا بد ان يفرض بين قاعدتي ا-د و ا-ه مقياس مشترك مثلا بان تكونا
كاعداد ٧ و ٤ فاقول اذا قسمت قاعدة ا-د الى سبعة اقسام
متساوية فقاعدة ا-ه تحوى من تلك الاقسام اربعة فاذا اقيم على
القاعدة من كل من نقط التقسيم هود فيجهدن سبعة مستطيلات صغار
متساوية لان تلك المستطيلات متساوية القواعد والارتفاعات فمستطيل
ا-د يحوى على سبعة مستطيلات ومستطيل ا-ه وى يحوى على
اربعة مستطيلات فقط فعلى هذا تكون نسبة مستطيل ا-د الى
مستطيل ا-ه وى كنسبة عدد ٧ الى عدد ٤ او كنسبة قاعدة
ا-د الى قاعدة ا-ه وتجري هذه الطريقة كما ذكر فيماعداهذا من سائر
النسب التى يفرض فيها مقياس مشترك فلذا كانت ا-د : ا-ه وى
:: ا-ب : ا-ه

(شكل ١٠٠) وفي الصورة الثانية اذا لم يفرض بين قاعدتي ا-د و ا-ه
مقياس مشترك فلا تزال ايضا ا-د : ا-ه وى :: ا-ب : ا-ه
فانه ان لم يكن هذا التناسب صحيحا فتبقى الثلاثة حدود الاول على حالها ويكون
رابع متناسب لها اكبر أو أصغر من ا-ه مثلا اذا كان التناسب الرابع
اكبر من ا-ه يعنى ان كانت ا-د : ا-ه وى :: ا-ب : ا-ه

فاذا قسم خط $ا$ الى اقسام متساوية كل قسم يكون أصغر من $هـ$ ح
حتى تقع نقطة $ط$ احدى نقط التقسيم بين نقطة $هـ$ وبين نقطة $ح$
فاذا أقيم منها عمود $ط ر$ على خط $ا ط$ ولوجود المقياس المشترك بين
قاعدتي $ا ب$ و $ا ط$ تكون نسبة $ا ب د$: $ا ط و$::
 $ا ب$: $ا ط$ كما صرح به في الشق الاول من هذه الدعوى وقد فرض ان
 $ا ب د$: $ا هـ و$:: $ا ب$: $ا ح$ ومن تساوى المقدمات
يحصل من التوالى تناسب وبه تصير $ا ط د$: $ا هـ و$:: $ا ط$: $ا ح$
فعلى هذا حيث ان مقدار $ا ح$ اكبر من مقدار $ا ط$ لا بد أن يكون
مستطيل $ا هـ و$ اكبر من مستطيل $ا ط د$ وهذا يوجب ان الجزء اكبر
من الكل وهو محال ومن ثمة لا يمكن صحة ذلك التناسب ولا تكون نسبة
مستطيل $ا ب د$ الى مستطيل $ا هـ و$ كنسبة قاعدة $ا ب$ الى مقدار
أكبر أو أصغر من $ا هـ$ سواء كان بين تلك القاعدتين مقياس مشترك أو لا
وبه ثبت المطلوب من ان تكون نسبة مستطيل $ا ب د$ الى مستطيل
 $ا هـ و$ كنسبة قاعدة $ا ب$ الى قاعدة $ا هـ$

(الدعوى الرابعة النظرية)

(شكل ١٠١) $ا ب د$ و $ا هـ و$ أى مستطيلين النسبة بينهما
كنسبة حاصل ضرب القواعد بالارتفاعات فيهما يعنى تكون نسبة
 $ا ب د$: $ا هـ و$:: $ا ب د$: $ا هـ و$ وفى هذين
المستطيلين يفرض ان الزاويتين المتقابلتين رأسهما مجتمعتان فى نقطة
 $ا$ فاذا امتد ضلعا $د هـ$ و $و$ على الاسستقامة حتى يلتقيان فى نقطة
 $ح$ ولا اتحاد ارتفاعهما وهو $ا د$ فى مستطيل $ا ب د$ و $ا هـ د$
تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتي $ا ب$ و $ا هـ$ وأيضا لاشتراك
ارتفاع $ا هـ$ بين مستطيل $ا هـ د$ و $ا هـ و$ تكون النسبة
بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما $ا د$ و $ا و$ ومن ثمة يظهر هذان
التناسبان .

وہما { ا - ج : اھ ع ی :: ا - ا : اھ
 اھ ع ی : اھ ر و :: ا - ا : ا و }

فأضربت حدود هذين التناسبين على سواء وحذف الحد المشترك أعني
 أ هـ في المضروب فيه المقدم والتالي تكون نسبة أ - ج : أ هـ دو
 :: أ - د : أ هـ × أ و وثبت المطلوب

تبيينه لاجل مساحة المستطيل يمكن أن يؤخذ حاصل ضرب قاعدته بارتفاعه والمراد منه هو حاصل ضرب العددين أعنى ما كان أحدهما العدد المعين بالاحد الخطى الذى اشتملت عليه القاعدة والآخر العدد المعين بالاحد الخطى الذى يحتويه الارتفاع وصارت هذه القاعدة هى الطريقة المستعملة فى علم الهندسة

مثلاً إذا كانت قاعدة مستطيل 3×10 ابعاد وارتفاعه 10 احاد فيشار الى ذلك المستطيل هكذا 3×10 او 30 ولكن العدد المقرد لا يحصل منه معنى مفرد .

وأما إذا كان - مستطيلاً وكانت قاعدته ١٢ وارتفاعه ٧
 اعداد فيشار إلى هذا المستطيل هكذا ٧×١٢ أو ٨٤ وبهذه النسبة
 بين مستطيلي أ و - كالنسبة بين عددي ٣٠ و ٨٤

وان جعل مستطيل a أحدا سطوحا فيصير مستطيل $b = \frac{a^2}{p}$ أعنى مساحته المطلقة نظرا الى المستطيل الذي اتخذ أحدا سطوحا يعنى $\frac{a^2}{p}$ بساوى الاحد السطحي المقروض

لكن انماخذ المربع احدى اسطحيها في مساحة السطوح اولى وأهون وهو المعتاد
ولذا اقتب المربع الذى ضلعه هو الاحد الخطين وما استخرج به من المساح
يكون حقيقيا مثلا في مستطيل آ الذى مساحته ٣٠ عدداهى عبارة
عن ثلاثين احدى اسطحيها أو ثلاثين مر بعا ضلعه مساو للاحد الخطين كما يرى من
هذا (شكل ١٠٢) ويقال لحاصل ضرب خطين أو عددين مستطيل الخطين
أو العددين وهذا أكثر ما استعمل في الهندسة ويقال لحاصل ضرب عددين

مختلفين مستطيل العددين كما قبل في علم الحساب لحاصل ضرب عدد في مثله مربع ولا يخفى انه كما يكون ١ و ٤ و ٩ الخ مربعات اعداد ١ و ٢ و ٣ و الخ يكون مربع ضعف خط أو عدد أربع أمثال مربعه (شكل ١٠٣) ومربع ثلاث أمثال خط أو عدد هو قدر تسعة أمثال مربعه وهذا واضح وقس عليه

(الدعوى الخامسة النظرية)

كل متوازي الاضلاع مساحته تساوي حاصل ضرب قاعدته بارتفاعه (شكل ٩٧) لانه من كون قاعدة a وارتفاع h متحددان في متوازي الاضلاع a و h ومستطيل a و h فيكونان متكافئين ومن كون مساحة المستطيل $a \times h =$ $a \times h$ فظهر ان مساحة متوازي الاضلاع a و h هي $a \times h$ وثبت

المطلوب

(نتيجة) الاشكال المتوازية الاضلاع متحدة الارتفاع النسبة بينها كالنسبة بين قواعدها وعكس الان كل ثلاثة مقادير a و b و c تكون متناسبة بنحو

$$a \times c : b \times c :: a : b$$

(الدعوى السادسة النظرية)

(شكل ١٠٤) مساحة أي مثلث تساوي حاصل ضرب قاعدته بنصف ارتفاعه لان قاعدة a وارتفاع h متحددان في مثلث a و h ومتوازي الاضلاع a و h يكون ذلك المثلث نصف متوازي الاضلاع ويكون مساحة متوازي الاضلاع هي $a \times h$ فظهر ان مساحة المثلث هي $\frac{1}{2} a \times h$ او $\frac{1}{2} a \times h$ ويثبت

المطلوب

(نتيجة) المثلثان المتحد القاعدة تكون النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعهما ومحدد الارتفاع أيضا النسبة بينهما كنسبة قاعدتهما

(الدعوى السابعة النظرية)

(شكل ١٠٥) كل شبه منحرف a و h مساحته هي حاصل ضرب

وضعف مستطيلهما

مثلا (شكل ١٠٦) اذا قسم خط a الى قسمين a و b فالربع المنشأ على خط a الكامل يحتوي على مربعي قسمي a و b ومستطيلين من نوع مستطيل حاصل من القسمين المذكورين يعني $a \times b$ او

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

فاذا رسم مربع a و b وأخذ a مساويا لقسم a ورسم خط b موازيا لخط a و c موازيا لخط a هو المربع المرسوم على قسم a لان a مساو a بالعمل والقسم الثاني b هو المربع المرسوم على قسم b لان $a = b$ و $a = b$ او فيكون تفاضل $a - b =$ تفاضل a و b فلذا صار $a = b$ ولكن من خاصية التوازي ان يكون $a = b$ و $b = c$ و $c = d$ فصار قسم c و d هو المربع المرسوم على قسم a فاذا طرح مربعاهذين القسمين من المربع الكامل يبقى مستطيل $a \times b$ و $b \times c$ كل واحد منهما مساو مستطيل $a \times b$ و $b \times c$ ومن ثمة ثبت المطلوب من أن يكون مربع خط a الكامل مساويا لمجموع مربعي a و b وضعف مستطيلهما

تنبيه أيضا بهذه الطريقة ثبت في علم الجبر في بيان تربيع الكمية ذات الحدين

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(الدعوى التاسعة النظرية)*

(شكل ١٠٧) اذا كان خط a تفاضل خطي a و b فالربع المرسوم على خط a يساوي مجموع مربعي a و b اذا طرح منه ضعف مستطيل a و b يعني يكون $a^2 - 2ab + b^2$ او $(a-b)^2$

$$= \frac{r}{a} + \frac{r}{b} - \frac{r}{c} - a \times b - c$$

ففي رسم مربع a ط و وأخذ a مساويا لخط a ورسم c موازيا لخط b ط و c موازيا لخط a ويكمل مربع a هو c ك
فالمستطيلان الحادثان c ط و c ك كل واحد منهما ما يكون
عين مستطيل $a \times b - c$ فظهر أنه إذا طرح المستطيلان المرقومان
من مجموع $\frac{r}{a} + \frac{r}{b}$ كل a ط c ك هـ a المقام المربعي $\frac{r}{a} + \frac{r}{b}$
يبقى مربع a هـ فلذا علم أن المربع المرسوم على خط a يساوي
الباقى حين يطرح ضعف مستطيل $a \times b - c$ من مجموع مربعي
 a و b ويثبت المطلوب

تنبيه وكذلك رقت هـ هذه الدعوى في علم الجبر هكذا $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

(الدعوى العاشرة النظرية)

المستطيل المتشابه من مجموع الخطيين المختلفين والتفاضل الذي بينهما ما يساوي
التفاضل بين مربعيهما

والمعنى (شكل ١٠٨) أن يكون $(a+b) \times (a-b) = (a-b)^2$

$$= \frac{r}{a} - \frac{r}{b} =$$

ففي اثني مربعين a ط و a هـ على a و a و امتد
ضلع a جهة b وأخذ c و c وكل مستطيل
أك c هـ فقاعدة هذا المستطيل وهي a تكون مساوية
لمجموع ضلعي a و b و ارتفاعه a وهو التفاضل بينهما
فلذا صار مستطيل a هـ $= (a+b) \times (a-b)$
ولذا علم أن هذا المستطيل مركب من قسمي a هـ $+ c$ ك

وان قسم $ح = ك$ مساوياً لتطيل $هـ$ و $دو$ لكون $ح = د هـ$
 و $ك = هـ$ كما لا يخفى فلهذا صار $اكه = ارحه +$
 $هـ دو$ وهما التقاضل بين مربع $ا ط و$ ومربع $ح ب$ الذي هو
 مربع $د ح ط ر$ ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يكون $(ا + ح)$

$$\times (ا - ح) = \frac{ر}{ا} - \frac{ر}{ح}$$

تنبيه و كذلك رقت هذه الدعوى في علم الجبر هكذا $(ا + ح) \times (ا - ح)$

$$= \frac{ر}{ا} - \frac{ر}{ح}$$

(الدعوى الحادية عشرة النظرية)

في كل مثلث قائم الزاوية المربع المنشأ على الوتر يساوي مجموع المربعين المنشأين
 على الضلعين الآخرين

(شكل ١٠٩) فني رسم مربع على كل من ثلاثة اضلاع مثلث $ا ب ح$
 الذي زاويته $آ$ قائمة ونزل عمود $ا د$ من زاوية $آ$ القائمة على وترها
 وامتد على استقامته الى نقطة $هـ$ ووصل وتر $ا د و$ $خ$ فالتثلثان
 المثلثان اعني $ا د و$ و $ح د و$ يكونان متساويين لتساوي مثلثي
 الاضلاع منهم والزاويا التي بينهما لان $ا د$ و $ح د$ متساويان لكونهما
 ضلعي مربع واحد وكذا $ح د = د و$ وايضا زاوية $ا د و$
 و $ح د و$ متساويتان لان كل واحد منهما مركبة من زاوية $ا د ح$
 وزاوية $ح د و$ القائمة او $ا د ح$ القائمة الاخرى (مقالة ١)
 فمثلث $ا د و$ هو نصف متوازي الاضلاع $د هـ و$ لاتحاد
 قاعدة $د و$ وارتفاعه $د$ وكذلك مثلث $ح د و$ نصف مربع
 $ا ح$ لانه يلزم من كون زاويتي $ا ح د$ و $ا ط ح$ قائمتين ان يكون
 خط $ا ح$ و $ا ط$ خطاً مستقيماً واحداً يوازي ضلعي $ح د$ وبهذا
 يكون مثلث $ح د و$ نصف مربع $ا ح$ لاتحادهما في قاعدة
 $ح د$ وارتفاع $ا د$ وتساوي مثلث $ا د و$ لمثلث $ح د و$ كما

صرح به يكون مستطيل وهو الذى هو ضعف مثلث ا د
مكافئاً لمربع ا ح الذى هو ضعف مثلث ع د وبمثل هذا يثبت
كون مستطيل د د ه د مكافئاً لمربع ا د وحيث حصل مربع
د د د من مجموع مستطيلى د د ه و د د ه يكون مربع د د د
المنشأ على وتر القائمة مساوياً لمجموع مربعى ا د ح ط و ا د ه المنشأين
على الضلعين الاخرين ويثبت المطلوب

$$\frac{r}{a} + \frac{r}{a} = \frac{r}{c} \quad \text{وذلك الدعوى تبين بهذا الوجه بالعلامة}$$

(نتيجة ١) مربع كل ضلع من الضلعين المحيطين بالقائمة يكون مساوياً بالتفاضل

$$\text{مربع وتر القائمة ومربع الضلع الاخر نحو } \frac{r}{a} = \frac{r}{c} - \frac{r}{a}$$

(نتيجة ٢) (شكل ١١٨) متى كان ا د د مربعاً و ا د قطره
يكون مثلث ا د د متساوياً للضلعين قائم الزاوية فلماذا يكون

$$\frac{r}{a} = \frac{r}{a} + \frac{r}{c} = \frac{r}{c} \quad \text{فعلى هذا يكون المربع المرسوم}$$

على قطر ا د ضعف المربع المرسوم على ضلع ا د فلأجل ادرال خواص
هذه الدعوى اذا رسم من نقطتى ا و د خطان مستقيمان موازيان للقطر

د د ومن نقطتى د و د خطان موازيان للقطر ا د فمربع

د د د الحادث هو مربع ا د وهو يحتوى على ثمانية امثال مثلث ا د ه

واما مربع ا د د فيحتوى على اربعة مثلثات من مثله فقط فلماذا

ظهر ان مربع د د د المنشأ على القطر هو ضعف مربع ا د د المنشأ

على الضلع ومن ثمة كانت $\frac{r}{a} : \frac{r}{c} :: ٢ : ١$ فاذا اخذ جذر

المقادير ايضا سير ا د : ا د :: $\sqrt{٢} : ١$ وقد علم ان لا جذر

صحى العدد ٢ فبين انه لا مقياس مشترك بين ضلع المربع وقطره وهذه

الخاصة صفة ستذكر تفصيلاً لاحقاً فيما سياتى من العمليات الاخرى

(نتيجة ٣) (شكل ١٠٩) لقد ثبت في شكل العروس ان مربع ا د مساو

استطيل $س هـ و$ ولا اتحاد ارتفاع $س و$ في مربع $س ح د و$ ومستطيل $س هـ و$ تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتي $س ح و س د$

وبه صارت $\frac{س}{ح} : \frac{س}{د} :: \frac{س}{ح} : \frac{س}{د}$ فعلى هذا تكون نسبة مربع وتر القائمة الى مربع أحد الضلعين المحيطين بها كنسبة وتر القائمة الى السهم المجاور لذلك الضلع وفي هذا المحل ما يسمى سهم هو قسم وتر القائمة المحدود بالعمود النازل من رأس القائمة على وترها فلذا يكون قسم $س د$ هو السهم المجاور لاضلع $ا ب$ واما قسم $د ح$ فهو السهم المجاور لاضلع $ا ح$

ومن ثمة صارت $\frac{س}{ح} : \frac{س}{د} :: \frac{ا ح}{ا ب} : \frac{س د}{س ح}$

(نتيجة ٤) من اتحاد الارتفاع في مستطيل $س هـ و$ و $س د ح$ كانت النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما $س د و س ح$ واتكافؤ هذين

المستطيلين بمربعي $ا ب$ و $ا ح$ تكون $\frac{ا ب}{ا ح} : \frac{ا ح}{س د} :: \frac{س د}{س ح} : \frac{س ح}{س د}$ ومن هذا صارت النسبة بين مربعي الضلعين المحيطين بالقائمة كالنسبة بين السهمين المجاورين لذلك الضلعين

(الدعوى الثانية عشرة النظرية)

في كل مثلث تفاضل مربع وتر الحادة ومجموع مربعي الضلعين الباقيين هو قدر ضعف مستطيل ضرب القاعدة فيما بين موقع العمود وتلك الزاوية الحادة

مثلا (شكل ١١٠) اذا كانت زاوية $ح$ في مثلث $ا ب ح$ حادة يكون مربع

$ا ب$ الموتر لها اصغر من مجموع مربعي $ا ح و س ح$ المحيطين بها فاذا انزل عمود $ا د$ على قاعدة $س ح$ فالتفاضل مساو لضعف

مستطيل $س ح د$ فلذا اذا طرح ضعف مستطيل $س ح د$ من مجموع مربعي $س ح و ا ح$ فالباقي يساوي مربع $ا ب$

فيكون $\frac{ا ب}{ا ح} = \frac{س ح}{ا ح} + \frac{ا ح}{ا ح} - \frac{س د}{ا ح} \times \frac{س ح}{ا ح}$ برهان هذه

الدعوى على ضربين

الاول وهو ان يكون العمود داخل مثلث $ا-ب-ج$ فيكون $ج-د = ج-ه$ $ج-د$ ومن ثمة صار $\frac{ج}{ج-د} = \frac{ج}{ج-ه} + \frac{ج}{ج-د} - \frac{ج}{ج-د} = ٢ - ج \times ج$ كما في(٩) فاذا زيد على هذين المتساويين مربع $ا$ يكون $\frac{ج}{ج-د} + \frac{ج}{ج-ه}$ $= \frac{ج}{ج-د} + \frac{ج}{ج-ه} + \frac{ج}{ج-د} - \frac{ج}{ج-د} = ٢ - ج \times ج$ لكن من كونمثلي $ا-د$ و $ا-ه$ قائمي الزاوية لازم ان يكون $\frac{ج}{ج-د} = \frac{ج}{ج-ه}$ $+$ ويكون ايضا $\frac{ج}{ج-د} = \frac{ج}{ج-ه} + \frac{ج}{ج-د}$ فاذا استبدلت هذهالاشياء المتساوية بما يساويها يكون $\frac{ج}{ج-د} + \frac{ج}{ج-ه} = ٢ - ج \times ج$ $ج \times ج$ الصورة الثانية وهو ان يكون العمود واقعا خارج مثلث $ا-ب-ج$ فحين كون $ج-د = ج-ه$ يكون $\frac{ج}{ج-د} = \frac{ج}{ج-ه}$ كما في $ج-د \times ج = ج-ه \times ج$ فاذا زيد على كل مربع $ا$ واخذ البديل كماصرح به في الشق الاول يكون $\frac{ج}{ج-د} + \frac{ج}{ج-ه} = ٢ - ج \times ج$ $ج \times ج$ ويثبت المطلوب

* (الدعوى الثالثة عشرة النظرية) *

في كل مثلث بمنفرج الزاوية فضل مربع وتر المنفرجة على مجموع مربعي

الضلعين الباقيين هو قدر ضعف مسطحين ضرب القاعدة فيما بين موقع

العمود وبين تلك المنفرجة

(شكل ١١١) اذا كانت زاوية $ج$ في مثلث $ا-ب-ج$ منفرجة فمربعضلع $ا-ب$ الموترها اكبر من مجموع مربعي ضلعي $ا-ج$ و $ب-ج$ المحيطين بها فاذا انزل $ا-د$ على $ج-د$ فالتفاضل هو قدر ضعف مسطحين

7×7 فعلى هذا اذا زيد ضعف مستطيل 7×7 على مجموع مربعي 7 و 7 يلزم ان يكون المجموع مساويا للمربع 7

یعنی $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a \times b}$

في هذه الدعوى لا يمكن وقوع العمود في داخل المثلث فإنه لو فرض وقوعه في الداخل على نقطة هـ يلزم أن تكون زاوية هـ في مثلث ا ب هـ قائمة ومن كون زاوية ب منفرجة حصل الخلف

فلوقوع الع. ودخارج المثلث يكون $s = z + s$ وعلى ما ذكر

في الدعوى الثامنة يكون $\frac{r}{s} + \frac{r}{r} = \frac{r}{s}$ $s \neq r$

فان زيد على كل من هذين التساويعين مربع اء يكون

$$s_7 \times s_2 = \frac{r}{s_1} + \frac{r}{s_7} + \frac{r}{s_2} = \frac{r}{s_1} + \frac{r}{s_2}$$

وان اخذ $\frac{r}{s}$ بدلا عن $\frac{r}{s}$ في $\frac{r}{s} + \frac{r}{s} + \frac{r}{s}$ عن $\frac{r}{s}$ +

$\frac{r}{rs} + \frac{r}{r-} = \frac{r}{-1}$ كما في الدعوى السابقة هيئت ذ يكون

$$\frac{2}{a} + 2 - 2 \times 2 \text{ وثبت المطلوب}$$

(تنبیه) * تساوی مجموع مربعی الضامین

للقائم الزاوية فقط لانه اذا كانت الزاوية التي بين الضلعين حادة يكون مجموع
 مربعيهما اكبر من مربع الضلع المقابل لها وان كانت منفرجة يكون مجموع
 مربعيهما اصغر

*** (الدعوى الرابعة عشرة النظرية) ***

مجموع ضعفه ربع الخط النازل من رأس المثلث الى وسط قاعدته وضعف

سربع نصف القاعدة مساوی مجموع مربعی الضلعین الآخرین

مثلاً (شكل ١١٢) اذا انزل خط اه من ا رأس مثلث ا-ج الى

مسافعات دہ - د بكون $\frac{r}{a} + \frac{r}{a} = \frac{r}{a} + \frac{r}{a}$

لأنه متى انزل عمود $ا$ من نقطة $آ$ على قاعدة $د$ فنكون زاوية

$$هـ \text{ من مثلث } ا هـ د \text{ حادة يكون } \frac{ا}{د} = \frac{ا هـ}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ} -$$

$د هـ د$ \times $هـ د$ كما صرح به في الدعوى (١٢) الثانية عشرة وكذلك

من كون زاوية $هـ$ من مثلث $ا هـ د$ منفرجة يكون $\frac{ا}{د} = \frac{ا هـ}{د هـ} -$

$$+ \frac{ا د}{د هـ} + د هـ د \times هـ د \text{ كما صرح به في الدعوى (١٣)}$$

الثالثة عشرة المقدمة فاذا اجعت هذه المتساويات ولو حظ أن $هـ د$

و $د هـ$ متساويان لانهم مناصفا للقاعدة واخذت $هـ د$ بدلا من

$$هـ د \text{ يكون } \frac{ا}{د} + \frac{ا د}{د هـ} = \frac{ا هـ}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ} + د هـ د \times هـ د$$

$$+ د هـ د \times هـ د - د هـ د \times هـ د \text{ لكن من كون مقدار}$$

$$د هـ د \times هـ د \text{ في الجمله زائدا و ناقصا في حذف و حينئذ ثبت المطلوب}$$

$$\text{من ان يكون } \frac{ا}{د} + \frac{ا د}{د هـ} = \frac{ا هـ}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ} + د هـ د$$

نتيجة في كل شكل متوازي الاضلاع بمجموع مربعي قطريه مساو لمجموع

مربعات اضلاعه

لانه (شكل ١١٣) من كون قطري $ا د$ و $د هـ$ في شكل متوازي الاضلاع $ا د هـ د$

$$\text{متناسقين في نقطة } هـ \text{ (مقالة ١) يكون في مثلث } ا د هـ \frac{ا}{د} + \frac{ا د}{د هـ} =$$

$$= \frac{ا هـ}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ} + د هـ د \times ا د \text{ وكذلك في مثلث } ا د هـ \frac{ا}{د} + \frac{ا د}{د هـ} =$$

$$= \frac{ا هـ}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ} + د هـ د \times د هـ \text{ فاذا اجعت هذه الاشياء المتساوية واخذت } د هـ$$

$$\text{بدلا من } د هـ \text{ المساوي له يكون } \frac{ا}{د} + \frac{ا د}{د هـ} + \frac{ا هـ}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ} + د هـ د \times د هـ$$

$$= \frac{ا هـ}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ} + د هـ د \times د هـ \text{ ولكن حيث ان } ا هـ د \text{ هو قدر مربع}$$

$$د هـ د \text{ او مربع قطر } ا د \text{ وايضا من كون مقدار } د هـ د \text{ هو مربع}$$

٢ ده او مربع قطر س ظهران مجموع مربعي القطرين بساوي مجموع مربعات اضلاعه ويثبت المطلوب

(الدعوى الخامسة عشرة النظرية)

(شكل ١١٤) اذا رسم خط ده موازيا لقاعدة ممثك اذ ف هذا الخط المرسوم يقسم ضلعي اذ و اذ على التناسب بمعنى تكون اذ : دس :: اذ : ده لانه متقى وصل خطا ده و دس قائم لثان الحاد ثان اعني سده و دده توجد فيهما قاعدة ده مشتركة ولو قوع زاويتي الرأس اعني س و د على الخط الموازي لثالث القاعدة يكون ارتفاعاهما متساويين ولذا يتكافئان وحيث كانت نقطة ه رأس مثلثي اده و سده ولا اتحاد الارتفاع فيهما تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما اذ و س

فعلى هذا صارت اده : سده :: اذ : دس وايضا لاشترك الرأس مثلثي اده و دده في نقطة د ولا اتحاد ارتفاعهما تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتي اذ و دس فتكون اده : دده :: اذ : دس وايضا لوجود النسبة المشتركة في هذين التناسبين يثبت المطلوب من ان تكون نسبة اذ : دس :: اذ : ده (نتيجة ١) اذا تناسبت المقادير الاربعة فلا تزال متناسبة بطريق التركيب فلذا صارت اذ + دس : اذ :: اذ + ده : اذ او اذ : اذ :: اذ : اذ وكذلك اذ : دس :: اذ : ده

(نتيجة ٢) (شكل ١١٥) اذا رسمت بين خطي اذ و د المستقيمين ما يراد من خطوط متوازية اذ و ه و د و ر و س الخ فهذه الخطوط المتوازية تقطع الخطين المرفوعين على التناسب وتكون اذ : دد :: ه : د : و : دت : دس

لانه اذا اخرج خطا ات و حى على الاستقامة يلقين في نقطة ط
ويكون في مثلث ط هو الحاد خط ا ح مواز بالقاعدته هو
ولذا صارت نسبة ط ه : اه :: ط و : ح و او ط ه : ط و
:: اه : ح و وكذلك في مثلث ط و ح تكون نسبة
ط ه : ه د :: ط و : و ح او ط ه : ط و :: ه د : و ح
: و فنكون نسبة ط ه : ط و مشتركة في النسابين
يحصل منهما هذا التناسب اعنى نسبة اه : ح و :: ه د : و ح
وبمثل هذا ثبت ان نسبة هو : و ح :: ر : ح و هلم
بر الى آخره

ولذا ظهر ان خطوط هو و ر ح المتوازية تقطع خطى ات و حى
المستقيمين على التناسب

(الدعوى السادسة عشر النظرية)

(شكل ١١٦) وبالعكس اذا قطع خط ه د المستقيم خطى اب
و ا ح على التناسب وكانت نسبة ا د : د ر :: اه : ه د
نخط ه د يكون مواز بالقاعدة ر ح
لانه ان لم يكن خط ه د مواز بالقاعدة ر ح وفرض ان خط ط مواز
لها فعلى ما صرح به في الدعوى القى تقدمت تكون نسبة ا د : د ر ::
ا ط : ط ح ولكن قد فرض ان نسبة ا د : د ر :: اه : ه د
فنكون نسبة ا د : د ر مشتركة في هذين النسابين يحصل منهما
هذا التناسب وهو ان تكون نسبة ا ط : ط ح :: اه : ه د
وهذا غير ممكن لان في هذا التناسب يلزم ان يكون تالى ه د اكبر من تالى
ط ح كما ان مقدم اه اكبر من مقدم ا ط وحينئذ يلزم ان يكون
الشيء الاعظم اصغر مما دونه وهذا خلف ومن ثمة لا يرسم خط من نقطة د
مواز بالقاعدة ر ح الا خط ه د وبه ثبت المطلوب من ان يكون خط ه د
هو الموازى لتلك القاعدة

* (قبييه) * اذا كانت نسبة $a : b :: c : d$: اه كذلك يكون خط de موازيا لقاعدة ac لان هذا التناسب لا يزال متناسبا بطريقة الفضل يعنى تكون نسبة $a - b : c - d :: a : c$ - اه : اه او نسبة $a : b :: c : d$: اه فعلى ما ثبت آنفا ظهر ان يكون خط de ايضا موازيا لقاعدة ac

* (الدعوى السابعة عشر النظرية) *

(شكل ١١٧) اى مثلث اذا انصقت زاويته a بخط de فـ هذا الخط يقسم قاعدة ac الى قسمين ad و dc تكون النسبة بينهما كالنسبة بين ضلعي a و b المحيطين بهما يعنى تكون نسبة $d : c :: a : b$

لانه اذا رسم de من نقطة e موازيا لخط ad وامتد ضلع a حتى يقطع هذا الموازى فى نقطة h نخط ad فى مثلث ac الحادث يكون موازيا لقاعدته ac ومن ثمة حصل هذا التناسب يعنى نسبة $d : c :: a : b$: اه ولكن من توازى خطى ad و eh وقطعهما بخط ac تكون زاوية a مساوية لزاوية h اه انظر (مقالة ١) وكذلك من كون زاويتى a و h خارجة وداخلية ايضا يكونان متساويين وبما فرض ان زاويتى a و h متساويتان تكون زاوية h ايضا مساوية لزاوية a اه ولذا يكون $ah = ac$ انظر (مقالة ١) فان وضع فى التناسب الذى ذكر خط ac بدلا عن مساويه ah يثبت المطلوب من ان تكون نسبة $d : c :: a : b$

* (الدعوى الثامنة عشر النظرية) *

المثلثان المتساويان الزوايا تكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة ويكونان متشابهين.

(شكل ١١٩) مثلا اذا كانت الزوايا المتناظرة فى مثلثى a و

د هـ بمعنى زاوية د ا ح = د هـ و ا ر = د هـ
و ا ر = د هـ تكون الاضلاع المتناظرة وهي المحيطة بالزوايا
المتساوية متناسبة بمعنى تكون نسبة ر : د هـ :: ا : د هـ
د هـ :: ا : د هـ

فإذا وضع ر و د هـ ضلعاهما المتناظران على استقامة واحدة واضد
ضلعاهما و هـ حتى يلتقيا في نقطة و فنكون خط د هـ
مستقيما واحدا وزاوية ر د ا مساوية لزاوية د هـ الداخلية والخارجية
فيكون خط ا ح موازيا لخط د هـ أو وه انظر (مقالة ١) وكذلك من
كون زاوية ا ر د مساوية لزاوية د هـ يكون خط ا ت أو و موازيا
لخط د هـ ولذا صار شكل ا د و متوازيا للاضلاع

فنكون خط ا ح في مثلث ر هـ د موازيا للقاعدة د هـ تكون نسبة
ر : د هـ :: ا : د هـ أو فإذا وضع في هذا التناسب خط
د هـ بدلا من مساويه او تكون نسبة ر : د هـ :: ا : د هـ
وايضا إذا فرض ر و قاعدة في مثلث ر هـ د يكون خط د هـ موازيا
لهما ومن ثمة حدث هذا التناسب ر : د هـ :: د هـ :: د هـ :
د هـ فان وضع ا ح بدلا من مساويه د هـ تكون نسبة ر :
د هـ :: ا : د هـ فلاشتراكت النسبة ر : د هـ : د هـ :
في هذا التناسب والتناسب الذي سلف صارت نسبة ا ح : د هـ ::
ا : د هـ لانه اذا كان كل من النسبتين مساويا للنسبة واحدة فتكونان
متساويتين وصارت اضلاع مثلثي ر ا ح و د هـ المتناظرة
متناسبة فعلى ما ذكر في الحد الثاني وهو انه اذا كانت اضلاع الشكليين
المتناظرة متناسبة وزواياهما المتناظرة متساوية يكونان متشابهين من اجل
ذلك يثبت المطلوب من ان يكون مثلثا ر ح ا و د هـ المتساويا والزوايا
متشابهين

نتيجة في تشابه المثلثين يكفيك تساوي مثنى الزوايا المتناظرة لانه متى تساوى

مثنى الزوايا في المثلثين تكون الزاوية الثالثة من ذيئيك المثلثين متساويتين ويصير
المثلثان متساوي الزوايا

(تنبيه) اعلم ان الاضلاع الموتره وهى المقابلة للزوايا المتساوية في المثلثات
المتشابهة تسمى اضلاع متناظرة ففى كانت زاوية ا ح ر مساوية لزاوية د ه و
يكون ضلع ا ر يناظر ضلع د و وكذلك يكون ضلعا ا د و د ه
متناظرين لانهم ماموران لزاويتي ا ح ر و د ه ه المتساويتين ومضى علم
تناظر الاضلاع يحدث هذا التناظر اعنى كون نسبة ا ر : د ه :: ا د : د و
د ه :: د ر : د ه

(الدعوى التاسعة عشر النظرية)

مضى تناسبت الاضلاع المتناظرة في مثلثين يصيران متساوي الزوايا ومتشابهين
(شكل ١٢٠) مثلا اذا كان في مثلثي ا ح ر و د ه و نسبة
ر : ه و :: ا ر : د ه :: ا د : د و تتساوى
فيهما الزوايا المتناظرة يعنى زاوية ا = د و ب = ه
و ر = و فاذا انشئت زاوية ه و د من نقطة ه مساوية
لزاوية ر و زاوية ه و د من نقطة و مساوية لزاوية ح فزاوية
د في مثلث ه و د تكون مساوية لزاوية ا و يصير مثلثا ا ح ر
و ه و د متساوي الزوايا كما مر في الدعوى التى تقدمت وتكون نسبة
ر : ه و :: ا ر : د ه :: ا د : د و ولكن فرض ان تكون ر ح
: ه و :: ا ر : د ه فمن تساوى الحدود الثلاثة في هذين
التناسبين يلزم ان يكون الحد الرابع ه د = ه و وايضا كما مر
في الدعوى المذكورة تكون نسبة ر ح : ه و :: ا د : د و
و كذلك فرض ان نسبة ر ح : ه و :: ا د : د و
و لتساوى الحدود الثلاثة ايضا يكون و د = و ه فعلى هذا صارت
اضلاع مثلثي د ه و و ه و د المتناظرة متساوية ولكن
من كون مثلث ه و د انشئت زوايا ه مساوية لزوايا مثلث ا ح ر يكون

مثلثا د ه و ا س ح متساوي الزوايا ويثبت المطلوب
 * (تبينه ١) * فعلى ما ظهر من اثبات الدعوتين الاخيرتين ان من تساوى الزوايا
 فى المثلثات يقتضى تناسب الاضلاع ومن تناسب الاضلاع يقتضى تساوى
 الزوايا وكل واحد من هذين الشرطين كاف لتحقق التشابه بين المثلثات
 الا ان هذه الخصوصية ليست فى الاشكال ذات الاضلاع الزائدة على الثلاثة لانه
 لو نظر الى ذى اربعة اضلاع لمكان يمكن فيه تغير تناسب الاضلاع بدون تبديل
 الزوايا وتغير الزوايا بدون تبديل الاضلاع فلذا ظهر ان من تناسب الاضلاع
 لم يقتضى تساوى الزوايا وبالعكس يعنى من تساوى الزوايا لم يقتضى تناسب
 الاضلاع الا فى المثلث فقط مثلاً على ما يرى من هذا

(الشكل ١٢١) انه اذا رسم ه و موازيا لخط ح ضلع ذى اربعة اضلاع
 تكون زوايا الشكل ا ه و ذى اربعة اضلاع مساوية لزوايا الشكل ا س ح
 ذى اربعة اضلاع الاخر ولكن تغيير تناسب الاضلاع ممكن وكذا يمكن تقارب
 أو تباعد نقطتي س و بدون تغيير تناسب اضلاع ذى اربعة اضلاع المذكور
 اعنى ا س و ح و د و ا وهذا يقتضى عدم مساواة الزوايا
 (تبينه ٢) لوجود المناسبة والتعلق بين هاتين الدعوتين الاخيرتين فكانت هما
 دعوى واحدة فاذا ضمت هذه الدعوى الى دعوى المثلث القائم الزاوية المسماة
 بشكل العروس فتكون هاتان الدعوتان اشهر الدعاوى واعظمها حيث انها
 كثيرة القوائد فى علم الهندسة وانها كافية للدعاوى العمالية فى حلها واثباتها
 وتطبيقها بالعمليات

لانه قد علم ان كل شكل قد يقسم الى مثلثات وكل مثلث يقسم الى مثلثين قائمى
 الزاوية والمعنى أن هذه الخصائص تعم جميع الاشكال
 * (الدعوى العشرون النظرية) *

يتشابه المثلثان اذا تساوى منهما آحاد الزوايا وكانت الاضلاع المحيطة بهما تين
 الزاويتين متناسبة

(شكل ١٢٢) مثلاً اذا كان فى مثلثى ا س ح و د ه و زاوية ا

= زاوية د ونسبة ار : ده :: اح : دو يكونان
متشابهين

فاذا اخذ ار مساويا لضع ده ورسم زح من نقطة د موازيا لقاعدة
ار تكون زاوية ادح مساوية لزاوية ار د انظر (مقالة ١)
ويكون مثلثا ادح و ار د متساوي الزوايا وتكون نسبة ار
: اد :: اح : ا ح

ولكن فرض ان نسبة ار : ده :: اح : دو ولكن ار
= ده بالعمل صارت دود هذين التناصبين الثلاثة متساوية فلذا
يكون الحدان الرابعان متساويين اعني اح = دو ولتساوي الضلعين
والزاوية التي بينهما فالضلعين الاخيرين والزاوية التي بينهما في مثلثي ادح و
دهو يكونان متساويين ولكن من كون مثلث ادح مشابها لمثلث
ار د يكون مثلث دهو المساوي له مشابها لمثلث ار د ويثبت
المطلوب

*** (الدعوى الحادية والعشرون النظرية) ***

في كل مثلثين اذا كانت الاضلاع المتناظرة متوازية او متعامدة يكون المثلثان
متشابهين

(شكل ١٢٣). اولالانه متى كان ضلع ار موازيا لضع ده وضع
ار موازيا لضع دهو في مثلثي ار د و دهو تكون زاوية
ار د مساوية لزاوية دهو انظر (مقالة ١) ومتى كان ضلع اح
يوازي ضلع دو تكون زاوية ار د مساوية لزاوية دود فلذا
تبقى زاوية ار د مساوية لزاوية دهو ولتساوي الزوايا في مثلثي
ار د و دهو يكونان متشابهين

ثانيا (شكل ١٢٤) اذا كان في مثلثي ار د و دهو ضلع ده
عمودا على ار و دو على اح ومن كون زاويتي ح و ط في شكل
ذي اربعة اضلاع ا ط د ح قائمتين بالقرص وزوايا ذي اربعة اضلاع

مساوية لاربعة قوائم انظر (مقالة ١) يكون الباقي وهو مجموع زاويتي ط ا ح و ط د ح مساويا للقائمتين ولكون مجموع زاويتي ه د و و ط د ح المتجاورتين مساويا للقائمتين تكون زاوية ه د و مساوية لزاوية ط ا ح او ا ح اذا طرحت ط د ح المشتركة من المتساويين وايضا على ما صرح به فيثبت من كون الضلع الثالث ه د و عمودا على ر د ان تكون زاوية د و ه مساوية لزاوية د و زاوية ه د و مساوية لزاوية ر ك كما صرح به ويصير المثلثان المتعامدا الاضلاع متساويي الزوايا ومتشابهين

تبيينه حيث تتوازي الاضلاع تكون متناظرة ومتى كانت عمادا فكذا تكون متناظرة فعلى ما يرى من شكل مائة واربعة وعشرين ان ضلع د ه مناظر ل ضلع ا ر وضلع د و مناظر ل ضلع ا ح وضلع ه د مناظر ل ضلع ر د ومتى تعامدت الاضلاع فتارة يكون وضع المثلثين المذكورين ليس كما يرى من (شكل ١٢٤) وان وجد على وضع آخر فيثبت ايضا بتساوي الزوايا سواء كان بالشكل ذي اربعة اضلاع مثل ا ط د ح الذي له قائمتان او بتقدير المثلثين القائمى الزاوية ذوى الرؤس المتقابلة ولاجل سهولة ذلك يرسم في مثلث ا ر د مثلث د ه و تكون اضلاعه موازية لاضلاع المثلث المقدربمثلث ا ر د قائبات هذه الطريقة هو كما ثبت في (شكل ١٢٤) ولا يحتاج الى اثبات اخر

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية)

(شكل ١٢٥) اذا وصل من رأس مثلث الى قاعدته خطوط مستقيمة او و ا د خ قدر ما يراد فهذه الخطوط الموصولة تقسم قاعدة ر د وماوازاها فهو د ه على التناسب يعنى ان تكون نسبة د ل : ر و :: ل ك : د و :: ك ط : د ح :: د و :: ك ط : د ح

لأنه من كون خط د ل موازيا لخط ر و يكون مثلثا ا د ل و ا ر و متساويي الزوايا ومتشابهين وبهذا نجد ان هذه التناسبات يعنى د ل : ر و :: ا ل : ا و وايضا تتوازي ل ك و ر

تكون $ال : او :: لك : ور$ ولاشتراك $ال : او$ في كل
 من التناسبين تكون النسبتان متساويتين متساوي كل منهما بالنسبة
 المشتركة المحذوفة فتعبر نسبة $ال : رو :: لك : ور$ وايضا
 $لك : ور :: ط : دح$ وهكذا الى التوالى تكون متناسبة
 فعلى هذا ثبت المطلوب من انه كما تنقسم قاعدة $رح$ في نقط $و و د$
 و $ح$ ينقسم خط $ده$ الموازي الى نقط $ل و ك و ط$
 نتيجة اذا انقسمت قاعدة $رح$ الى اقسام متساوية في نقط $و و د و ح$
 كذلك ينقسم خط $ده$ الموازي لها في نقط $ل و ك و ط$ على التساوى
 * (الدعوى الثالثة والعشرون النظرية) *

(شكل ١٢٦) اذا انزل عمود $اد$ من زاوية $ا$ القائمة من مثلث قائم الزاوية
 على وترها $رح$ اولايكون المثلثان الحادان $ارد$ و $ادح$ متشابهين
 وكل واحد منهما مشابه لمثلث $ارح$ الكامل
 نانيا ان كل واحد من ضلعي $ار$ و $اد$ المحيطين بالقائمة يصير وسطا
 متناسبا بين $رح$ وتر القائمة والقسم المجاورة $رد$ أو $دح$
 ثالثا ان $اد$ العمود النازل من القائمة على الوتر يكون وسطا متناسبا
 بين قسمي $رد$ و $دح$

الحالة الاولى لان في مثلثي $ارد$ و $ادح$ زاويتي $ردا$ و $داح$
 متساويتان لقيامهما ولاشتراك زاوية $ر$ فيهما تكون زاوية $راد$
 الثالثة الباقية مساوية لزاوية $ح$ الثالثة الاخرى ويتشابه المثلثان
 المذكوران وبمثل هذا ثبت ان يكون مثلث $داح$ مشابها لمثلث $ارح$
 ومن ثمة تكون المثلثات الثلاثة متساوية الزوايا ومتشابهة

الحالة الثانية من كون مثلث $راد$ مشابها لمثلث $ارح$ تكون
 اضلاعهما المتناظرة متناسبة ويكون ضلع $رد$ في المثلث الاصغر نظير
 اضلع $ار$ في المثلث الاكبر فانهما موتران لزاويتي $راد$ و $داح$
 المتساويتين وكذلك وتر $را$ في المثلث الاصغر يكون نظيرا لوتر $رح$

وذلك دليل على ان ابراهيم الهندسة قطعية ولو وقع في بعض الاثبات أدنى
مـ ولما كان محسوسا ولو بعد دعوى كثيرة حيث ان سائر ابراهيم الهندسة مبينة
على القضية البدئية التي تفهم الخصم وتجبره على التسليم

نتيجة (شكل ١٢٧) اذا وصل وتر a و a من نقطة A الواقعة على المحيط الى نهايتي قطر c فزاوية A من مثلث a c نصير قائمة فلذا عمود a يكون وسطا متناسبا بين b و c و d

ووتر ۱- بین قطر ۲ و بین سهم ۲ المجاوره فیصير $\frac{r}{a} =$ ۲- وحيث ان وتر ۱ وسط متناسب بين قطر ۲ و بين سهم

س المجاوره يكون $\frac{r}{s} = s \times s -$ فيحصل من كلتا المعادلتين
تناسب نحو $\frac{r}{s} : \frac{r}{s} :: s : s$ واذا قدميها

ا- و ا- تصير ا- : ا- :: س- : س- وكذلك

أيضا أوبوز القائمة قد سبق ذكره في النتيجة الثالثة والرابعة من شكل العروس تتأمل

(الدعوى الرابعة والعشرون النظرية)

اذا تساوت زاويتان من المثلثين تكون النسبة بينهما كالنسبة بين مسطعتي
الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين

مثلا (شكل ١٢٨) نسبة مثلث $أ-ح$ الى مثلث $أ-هـ$ المتساوي الزاوية كنسبة مستطيل $أ-ح$ الى مستطيل $أ-د$ $أ-هـ$

١٥ هـ واتحاد ارتفاعهما تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما

أ- و أ بمعنى تكون أ- ه : أ ه :: أ- : أ
وأيضاً من اتحاد الارتفاع في مثلث أ- ح و أ- ه تكون نسبة

$ا - ح : ا - ه :: ا : ا ه$
 فاذا ضربت حدود هذين التناسيب على الترتيب تكون $ا - ح \times ا - ه$
 $: ا - ه \times ا - ه :: ا - ا : ا د \times ا ه$ وحيث
 لا خلل في مقدار هذا التناسب اذا حذف منه المضروب فيه المشترك
 وهو $ا - ه$ ثبت المطلوب وهو ان $ا - ح : ا - ه :: ا : ا د$
 $ا : ا د \times ا د : ا ه$
 نتيجة اذا كان مستطيل $ا - ح \times ا د$ يساوى مستطيل $ا د \times ا ه$
 يكون المثلثان المذكوران متكافئين أو اذا كانت نسبة $ا - ح : ا د ::$
 $ا ه : ا د$ يكون المثلثان المرقومان متكافئين وخط $د$ يوازي
 خط $ه$

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية)

النسبة بين المثلثين المتشابهين كالنسبة بين مربعي ضلعيهما المتناظرين
 (شكل ١٢٢) لان زاوية $ا$ مساوية لزاوية $د$ في مثلثي $ا - ح$
 و $د ه و$ وكذا زاوية $ح$ مساوية لزاوية $ه$ فتكون نسبة
 $ا - ح : د ه و :: ا - ح : د ه \times ا د : د ه \times د و$ كما صرح به
 في الدعوى التي تقدمت وايضا بتشابه المثلثين تكون نسبة $ا - ح : د ه$
 $:: ا د : د و$ فاذا ضربت حدود هذا التناسب على الترتيب في حدود
 تناسب $ا د : د و :: ا د : د و$ الحاصل من نسبة واحدة حدا
 في حد يحصل تناسب $ا - ح \times ا د : د ه \times د و :: ا د : د و$
 فلو جرد النسبة المشتركة في هذا التناسب وفي التناسب الذي تقدم به يكون
 $ا - ح : د ه و :: ا د : د و$ فعمل ان نسبة مثلثي $ا - ح$ و $د ه و$
 المتشابهين كنسبة مربعي ضلعيهما $ا د$ و $د و$ أو كنسبة مربعي ضلعيهما
 المتناظرين الآخرين وبهذا ثبت المطلوب
(الدعوى السادسة والعشرون النظرية)

كثيرا الاضلاع المتشابهان مر بكان من مثلثات متشابهة متساوية متحدة العدد
متماثلة الوضع

(شكل ١٢٩) لانه اذا وصل وتر $ا ح$ و $ا د$ من $ا$ زاوية كثير
الاضلاع $ا - ح د ه$ و وتر $و ح$ و $و ط$ من و نظيرة $ا$
من كثير الاضلاع و $د ح ط$ في تشابه الشككين نصير زاوية $ا - ح د$
مساوية لزاوية و $د ح$ نظيرتها (حد ٢) وماء هذا يكون ضلعا $ا -$
و $ح$ مناسبين لضلعي و $د$ و $د ح$ ومن ثمة صارت نسبة $ا -$
: و $د :: ح : د$ ويكون مثلثا $ا - ح د$ و و $د ح$ متشابهين
لاتحاد زاويتيهم ماع تناسب الاضلاع المحيطة بهم مافة تكون زاوية
 $ا - ح د$ مساوية لزاوية و $د ح ط$ فاذ اطرحت هاتان المتساويتان من زاويتي
 $ا - ح د$ و و $د ح ط$ المتساويتين تبقى زاويتي $ا - ح د$ و و $د ح ط$
متساويتين ولتشابه مثلثي $ا - ح د$ و و $د ح ط$ تكون نسبة $ا - ح د$:
و $د :: ح : د$ ومن تشابه كثيرى الاضلاع تكون ايضا نسبة
 $ا - ح د : د ح :: د ح : ح ط$ ولاشترالك النسبة في هذين التناسين
تكون نسبة $ا - ح د : و ح :: ح د : ح ط$ وقد ثبت تساوى
زاويتي $ا - ح د$ و و $د ح ط$ فصار مثلثا $ا - ح د$ و و $د ح ط$ متشابهين
لاتحاد زاويتيهم ماع تناسب الاضلاع المحيطة بهم مامثنى وثبت تشابه جميع
المثلثات المركب منها كثيرا الاضلاع المفروضان نظرا الى عدة اضلاعهما كما
صرح به ومن ثمة ظهر ان يكون كثيرا الاضلاع المتشابهان مر كمين من مثلثات
متشابهة متحدة في العدد ومتماثلة في الوضع وبه يثبت المطلوب

تنبيه ايضا عكس هذه صحيح أعني ان كل كثيرى الاضلاع اذا تر بكان من مثلثات
متشابهة متحدة العدد متماثلة الوضع بصيران متشابهين لان تشابه المثلثات
يوجب ان تكون زاوية $ا - ح د = و د ح$ و $ا - ح د = د ح و$ و $ا - ح د =$
 $و ح ط$ ولذا صارت $ا - ح د = د ح ط$ وأيضا تكون زاوية $د ح د$
 $= ح ط د$ الخ ومساوى هذا تكون نسبة $ا - ح د : و د :: د ح : و د$

: روح :: ١ : و ح :: ٢ : ح ط الخ وحيث ثبت تساوى
 زوايا كثيرى الاضلاع مع تناسب الاضلاع فهما متشابهان
 * (الدعوى السابعة والعشرون النظرية) *

النسبة بين محيطى كثيرى الاضلاع المتشابهين كالنسبة بين اضلاعهما
 المتناظرة والنسبة بين سطوحهما كالنسبة بين مربعات اضلاعهما المتناظرة
 (شكل ١٢٩) أولامن تشابه الشكلين تكون نسبة ا - ر : و د ::
 ر - ح : روح :: ٢ : ح ط الخ وحيث كانت نسبة مجموع
 المقدمات الى مجموع التوالى كنسبة مقدم الى تاليه فعلى هذا يظهر ان نسبة
 مجموع المقدمات اعنى ا - ر + ر - ح + ح ط الخ أى محيط الشكل
 الاول الى مجموع التوالى اعنى و د + روح + ح ط الخ أى محيط
 الشكل الثانى كنسبة أحد المقدمات الى أحد التوالى يعنى ضلع ا - ر الى
 نظيره و د

ثانيا من تشابه مثلثى ا - ر ح و و د ح تكون نسبة ا - ر : و د ح
 :: ا ح : روح ومن تشابه مثلثى ا ح د و و ح ط كذلك تكون
 ا ح د : و ح ط :: ا ح : روح ولاشتراك ا ح : و ح فى هذين
 التناسين صارت نسبة

ا - ر : و د ح :: ا ح د : و ح ط وبمثل هذا يثبت كون نسبة
 ا ح د : و ح ط :: ا د ه : و ط ع فعلى هذا يحكم بأن تكون
 جميع المثلثات متناسبة لوجود النسب المتساوية فيها على التوالى
 ومن كون نسبة مجموع المقدمات التى هى ا - ر + ا ح د +
 ا د ه أو مساحة كثير الاضلاع ا - ر ح د ه الى مجموع التوالى
 أعنى و د ح + و ح ط + و ط ع أو مساحة كثير الاضلاع
 و د ح ط ع كنسبة ا - ر أحد المقدمات الى تاليه وهو و د ح
 أو كنسبة ا - ر الى و د من أجل ذلك ظهر ان نسبة سطوح

كثيرى الاضلاع المتشابهين \equiv كنسبة مربعات اضلاعهما المتناظرة
ويثبت المطلوب

نتيجة اذا انشئت ثلاثة أشكال كثيرة الاضلاع متشابهة بأن تكون اضلاعها
المتناظرة مساوية لثلاثة اضلاع مثلث قائم الزاوية فمساحة الشكل المرسوم على
وتر القائمة تكون مساوية لمجموع مساحة الاثنين الآخرين لانه يلزم من كون
نسبة الثلاثة أشكال المرسومة \equiv كنسبة مربعات اضلاعها المتناظرة
ومن حيث ان في المثلث القائم الزاوية مربع الوتر مساويا لمجموع مربعي الضلعين
الآخرين فعلى مقتضى التناسب مساحة مجموع الشكلين تكون مساوية لمساحة
الشكل الآخر المتشأ على الوتر

(الدعوى الثامنة والعشرون النظرية)

*(شكل ١٣٠) اجزاء وترى ا - و هـ المتقاطعين داخل الدائرة تكون
متناسبة تناسبا مقلوبا وهوان تكون ا هـ : د هـ :: ح هـ : هـ هـ
لانه اذا وصل د و ا هـ فوجود زاوية هـ مشتركة في مثلثي ا هـ د هـ
و هـ هـ الحادتين وتساوى زاويتي ا و د لوقوعهما في قطعة
واحدة وكذا زاويتي د و ح يكون المثلثان المرقومان متشابهين
ولتناسب الاضلاع المتناظرة منهما علم ان نسبة ا هـ : د هـ :: ح هـ : هـ
ويثبت المطلوب

(الدعوى التاسعة والعشرون النظرية)

*(شكل ١٢١) اذا تعين قوس د هـ المقعر بوصل خطى د هـ و هـ د
القاطعين المتلاقين في نقطة هـ الواقعة خارج الدائرة فالقاطعان
الكاملان المذكوران يكونان مناسبين اقسامهما الخارجين تناسباً مقلوبا وهـ
ان تكون نسبة هـ د : هـ د :: هـ د : هـ ا

لانه اذا وصل ا هـ و د هـ فلاشترال زاوية هـ في مثلثي هـ ا د هـ و
هـ د هـ الحادتين ووقوع زاويتي د و ح في قطعة واحدة تكونان
متساويتين فيتشابه المثلثان وهـ يكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة

فلذا صارت نسبة هـ ر : هـ ج :: هـ د : هـ ا وثبت المطلوب
(نتيجة) من تساوى مستطيل الطرفين بمستطيل الوسطين يكون مستطيل
احد القاطعين بجزئه الخارج مساويا لمستطيل القاطع الاخر بجزئه الخارج عن
الدائرة اعني ان مستطيل هـ ر \times ا هـ يساوى مستطيل هـ ج \times هـ د
تنبيه اعلم ان هذه الدعوى ينهال بين الدعوى التي تقدمت مناسبة وموافقة
وانما تختلف تلك الدعوى بتقاطع وترى ا ب و ج داخل الدائرة بخلاف
هذه فان وترها يتقاطع خارج الدائرة
وأما الدعوى الالتمية فكانها موصوفة لهذه الدعوى

(الدعوى الثلاثون النظرية)

(شكل ١٣٢) اذا وصل من نقطة هـ الواقعة خارج الدائرة خطا ا هـ
المماس و هـ ج القاطع فاخط المماس المذكور يكون وسطا متناسبا بين
الخط القاطع وجزئه الخارج اعني ان تكون هـ ج : هـ ا :: هـ د : هـ د

فعلى هذا تكون هـ ا $= \frac{r}{r}$ هـ ج \times هـ د

لانه اذا وصل ا د وفي مثلثي هـ ا د و هـ ا ج زاوية هـ
المشتركة وزاوية هـ ا د الحاصلة من وتر وخط مماس يكون نصف
قوس ا د معيارا لها ومن كون القوس المذكور أيضا معيارا لزاوية
ج تكون زاوية هـ ا د مساوية لزاوية ج ويكون المثلثان
المذكوران متشابهين ومن ثمة كانت نسبة هـ ج : هـ ا :: هـ د : هـ د

هـ ا : هـ د ويكون هـ ا $= \frac{r}{r}$ هـ ج \times هـ د ويثبت المطلوب

(الدعوى الحادية والثلاثون النظرية)

(شكل ١٣٣) في أي مثلث كمثلث ا ب ج اذا انصفت زاويته ا بخط ا د
فمستطيل ا ب و ا ج الضاعين المحيطين بهما مساويا لمستطيل قسهي ر د
و د ج ومربع ا د المنصف * لانه اذا رسم محيط دائرة مار بزاويا مثلث

ا- ح ومد خط اى حتى انتهى الى محيط الدائرة ووصل هـ ح
 فثالث ر اى الحادث يشابه مثلث هـ ا ح * لانه يلزم من كون زاوية
 ر اى مساوية لزاوية هـ ا ح كما فرض وزاوية ر و هـ متساويتين
 لوقوعهما في قطعة واحدة ان يكون المثلثان المذكوران متشابهين وتكون
 اضلاعهما المتناظرة متناسبة اعنى ان نسبة ا- ر : ا هـ
 :: اى : ا ح وبهذا يكون ا- ر \times ا ح = ا هـ \times ا هـ
 اى لكن حيث ان ا هـ = اى + ر هـ اذا ضرب كل من
 هذين المتساويين في خط اى يكون ا هـ \times اى = اى \times اى + $\frac{r}{2}$ اى \times اى
 ر هـ لكن من \times اى = ر هـ \times اى = ر هـ \times اى يكون
 ا- ر \times ا ح = اى \times اى + $\frac{r}{2}$ اى \times اى ويثبت المطلوب

(الدعوى الثانية والثلاثون النظرية)

(شكل ١٣٤) مستطيل عمود اى النازل من رأس مثلث على قاعدته
 و هـ الذى هو قطر الدائرة المرسومة على المثلث المذكور مساو
 لمستطيل ضلعي ا- ر و ا ح المحيطين بزاوية الرأس
 لانه اذا وصل ا هـ ففي احد مثلثي ا- ر و ا هـ زاوية ا مساوية
 لزاوية ر في الآخر لكونهما قائمتين وزاويتي ر و هـ متساويتان لوقوعهما
 في قطعة واحدة فعلى هذا يكون المثلثان المذكوران متشابهين فظهر ان نسبة
 ا- ر : هـ :: اى : ا ح ويكون ا- ر \times ا ح = هـ \times اى ويثبت المطلوب
 \times اى ويثبت المطلوب

نتيجة اذا ضرب كل من هذين المقدارين المتساويين في ر هـ بعينه يصير
 ا- ر \times ا ح \times ر هـ = هـ \times اى \times ر هـ لكن حيث ان
 مستطيل اى \times ر هـ مساو ضعف مساحة ذلك المثلث فحاصل
 ضرب الاضلاع الثلاثة من مثلث يساوى حاصل ضرب ضعف سطحه في قطر
 الدائرة المرسومة عليه وما سيبقى من ضرب الثلاثة خواط في بعض يدل على

مساحة جسم فحينئذ تصور تلك الخطوط كالأعداد الحسابية كما لا يخفى
 تنبيهه بآب أن مساحة أى مثلث تساوى حاصل ضرب نصف نصف قطر
 الدائرة المرسومة داخل ذلك المثلث بجميع اضلاعه اعنى محيطه
 لان في (شكل ٨٧) رؤس مثلثات $أ-ح-و$ و $ح-ع-و$ و $أ-ع-و$ مشتركة
 في نقطة $و$ وحيث ان نصف قطر الدائرة المرسومة داخل مثلث $أ-ح-و$ هو
 ارتفاع مشترك لتلك المثلثات يعلم ان مجموع مساح المثلثات المذكورة يساوى
 حاصل ضرب قواعد $أ-و$ و $ح-و$ و $أ-و$ في ربع قطر $و$ فحينئذ ان
 مساحة مثلث $أ-ح-و$ تساوى حاصل ضرب مجموع اضلاعه الثلاثة في ربع
 قطر الدائرة المرسومة داخل ذلك المثلث

(الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية)

(شكل ١٣٥) كل شكل ذى أربعة اضلاع مرسوم داخل الدائرة مثل
 $أ-ح-د-و$ مستطيل قطريه $أ-د$ و $ح-و$ يساوى مجموع مستطيلي
 الاضلاع المتقابلة يعنى يكون $أ-د \times ح-و = أ-ح \times د-و + أ-و \times ح-د$

لانه اذا أخذ $و$ مساويا لقوس $أ-د$ ووصل $و$ ه بقطع قطر $أ-د$
 في نقطة $و$ فمثلثا $أ-و-د$ و $أ-ب-د$ الحادئان بصيران متشابهين حيث ان
 نصف كل من قوسى $أ-د$ و $و-د$ المتساويين هو مقدار زاويتى $أ-د-و$ و $و-د-و$
 فهما متساويتان ولوقوع كل من زاويتى $أ-د-و$ و $و-د-و$ في قطعة
 $أ-د$ تكونان أيضا متساويتين فعلى هذا صار مثلثا $أ-د-و$ و $و-د-و$
 متشابهين لتساوى الزوايا المتناظرة فيهما منى وتكون نسبة $أ-د : و-د$
 :: $و-د : د-و$ وبهذا صار $أ-د \times و-د = و-د \times د-و$
 وأيضا مثلث $أ-و-د$ يشابه مثلث $د-و-و$ لانه اذا زيد $د-و$ على كل من
 قوسى $أ-د$ و $و-د$ المتساويين بصير قوس $أ-د$ و قوس $د-و$
 متساويين وحينئذ زاوية $أ-و-د$ تساوى $د-و-و$ ولوقوع زاويتى $أ-و-د$
 و $د-و-و$ في قطعة واحدة تكونان متساويتين فلذا تشابه مثلثا $أ-و-د$

و $د ر$ وتناوبت اضلاعهما التناظرة وصارت نسبة $ا ر : د ر$
 $:: ا د : د و$ و $ا ر = د ر \times د ر$ او فاذا جمعت
 الحواصل المتساوية السالفة على هذين الحاصلين يصير $ا ر \times د ر +$
 $ا د \times د ر = د ر \times ا د + د ر \times د و$ لكن $د ر$
 $\times ا د + ا د \times د ر = د و \times د ر = (ا د + د و) \times د ر$
 $\times ا د$ وبهذا ثبت المطلوب وهو ان $ا ر \times د ر + ا د \times د ر$
 $= د و \times د ر$

فتبينه هنالك دعوى أخرى تتعلق بنى الاربعة الاضلاع المرسوم داخل الدائرة
 ممكن اثباتها كما صرح به فيما مضى وذلك انه من تشابه مثلثي $ا ر د$ و $د و ر$
 تكون نسبة $د ر : د و :: ا ر : و ر$ ويصير $ر و \times د ر =$
 $د ر \times ا ر$ ومتى وصل $د ه$ فثلث $د ه$ الحادث يشابه كلام من مثلثي
 $ا د ر$ و $د و ر$ وتكون نسبة $د ر : د و :: د ه : و ه$
 و $د و \times د ر = د ر \times د ه$ ومن كون $د ه = ا د$
 يصير $د و \times د ر = ا د \times د ر$ فاذا جمعت الحواصل المتساوية
 السالفة على هذه المتساوية يصير $ر و \times د ر + د و \times د ر =$
 $د ر \times ا ر + ا د \times د ر$ لكن $د ر \times د و + د و \times د ر$
 $= د ر \times (ر و + د و) = د ر \times د ه$ فلذا يكون
 $د ر \times د ه = د ر \times ا ر + ا د \times د ر$ واذا أخذ
 $د ر$ مساويا لقوس $ا د$ ووصل خط $د ح ر$ فعلى ما صرح به الآن
 يصير $د ر \times د ا = ا ر \times ا د + د ر \times د ر$ لكن
 قوس $د ر = د ه$ فاذا ضم على كل من هذين المتساويين قوس
 $د ر$ يصير قوس $د ر = د ر$ ومن ثمة كان وتر $د ر$ مساويا
 لوتر $د ه$ فلذا صارت النسبة بين مستطيلي $د ه \times د ر$ و $د ر \times د ا$
 كالنسبة بين قطري $د ر$ و $د ا$ حينئذ تكون نسبة $د ر : د ا$
 $:: ا ر \times د ر + د ر \times ا د : د ر \times ا ر + ا د \times د ر$

د فبناء على ذلك علم ان النسبة بين قطري ذى الاربعة الاضلاع كالنسبة بين المستطيلين الحادثين من الضلعين المتعلى النهايتين وكل من هاتين القصيتين مستعمل في استخراج الاقطار اذا كانت الاضلاع معلومة

(الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية)

(شكل ١٣٦) اذا كانت نقطة د واقعة على نصف قطر ا ح داخل الدائرة ونقطة ه واقعة على استقامته خارجها وكانت نسبة د ه : ح ا :: ح ا : د ه فكل خطين مستقيمين موصولين بخوم د و م ه من م أى نقطة واقعة على ذلك المحيط الى نقطتي د و ه المذكورتين يكونان على نسبة واحدة أعنى نسبة م د : م ه :: ا د : ا ه *
لانه فرض ان نسبة د ه : ح ا :: ح ا : د ه فاذا أخذ ح م المساوي لقطر ح ا عوضا عنه تصير نسبة د ه : ح م :: ح م : ح ه ولاشتراك زاوية ح في مثلتي د ه م و ه م وناسب الاضلاع المحيطة بها يتشابه المثلثان المذكوران وتكون نسبة الضلع الثالث م د فيهما الى ضلع م ه كنسبة د ه الى ح م أولى ح ا لكن نسبة د ه : ح ا :: ح ا : د ه وحيث ان المناسبة لم تزل متناسبة بطريقتي الفضل تكون نسبة د ه : ح ا :: ح ا - د ه : ح ه - ح ا او د ه : ح ا :: ا د : ا ه ويتساوى النسبة في هذا التناسب والنسبة تقدم ثبت المطلوب وهو ان نسبة م د : م ه :: ا د : ا ه

(بيان الدعاوى العملية المتعلقة بالمقالة الثالثة)

(الدعوى الاولى العملية)

طريقة تقسيم الخط المستقيم المحدود الى اقسام متساوية بقدر ما يراد * اولى اقسام متناسبة لخطوط معلومة

(شكل ١٣٧) الحالة الاولى اذا اريدت تقسيم خط ا ب المستقيم الى خمسة اقسام متساوية يرسم خط ال غير المحدود من نهاية ا ويؤخذ مقدار ما

ا ح ويقل على خط ا ل خمس مرات ويوصل بين د نهاية القسم الخامس
 وبين - بخط د ر فاذا رسم خط ح ح موازيا لخط د ر فقسم
 ا ح يكون خمس ا ر فاذا اخذ قسم ا ح خمس مرات على خط ا ر
 فينقسم الى خمسة اقسام متساوية * لانه يلزم من ككون خط ح ح موازيا
 لخط د ر ان يقطع خطا ا ر و ا د فينقطعي ح و ح على التناسب
 ولكن من كون قسم ا ح خمس خط ا ر يكون ا ح خمس خط ا ر
 الحالة الثانية (شكل ١٣٨) اذا اريدت قسم خط ا ب الى اقسام متناسبة
 لخطوط د و م و ل المعلومة يرسم من نقطة ا خط ا ر غير
 محدود ويؤخذ خط ا ح مساويا لمقدار د و ح مساويا لمقدار م
 و د مساويا لمقدار ل ويوصل بين نهايتي - و ه فاذا رسم
 من نقطتي ح و د خطا ح ح و د موازيين لخط ه ر فاقسام
 خط ا ر وهي ا ح و ح و د و د تكون مناسبة لخطوط د
 و م و ل المقرضة
 لانه من ككون خطوط ح ح و د و د متوازية تسكون اقسام
 ا ح و ح و د و د و ر مناسبة لاقسام ا د و د و د و د ومن
 كون اقسام ا د و د و د و د مساوية لاقسام د و م و ل
 فتكون ا ح و ح و د و د وهي اقسام خط ا ر مناسبة لتلك الخطوط
 المقرضة ويثبت المطلوب

(الدعوى الثانية العملية)

(شكل ١٣٩) طريقة استخراج الرابع المناسب لثلاثة خطوط معلومة
 ا و - و ح يرسم خطا د ه و د على ان يحد ثا زاوية
 ويؤخذ على خط د ه خط د ر مساويا لخط ا و خط د ح مساويا لخط
 - و على خط د و يؤخذ د س مساويا لخط ح و ويوصل د س فاذا رسم
 خط ح ط موازيا لخط د س فخط ح ط يكون هو الرابع المناسب
 المطلوب

لأنه يلزم من كون خط ط ح موازيا لخط د ع أن يحصل هذا التناسب وهو
 أن تكون نسبة د ر : د ح :: د ع : د ط وحيث أن في هذا التناسب
 ثلاثة حدود مساوية للثلاثة خطوط المعلومة صارت نسبة أ : ب ::
 ج : د وثبت المطلوب من أن يكون خط ط ح هو الرابع
 المناسب

نتيجة وكذلك يستخرج الثالث المناسب لمقداري أ و ب المعلومين كما يستخرج
 الرابع المناسب لأن استخراج الثالث المناسب هو عين استخراج الرابع
 المناسب لثلاثة خطوط أ و ب و ب المعلومة المذكورة
 * (الدعوى الثالثة العملية) *

طريقة استخراج الوسط المناسب بين مقداري أ و ب المعلومين
 (شكل ١٤٠) يؤخذ على خط د و المستقيم الغير المحدود د ه = أ
 و ه د = ب ويجعل د و نصف قطر ويرسم نصف محيط د و
 ويقام على القطر عمود ه ر من نقطة ه وبذلك العمود حتى يلاق المحيط
 في نقطة ر فعمود ه ر هو الوسط المناسب المطلوب * لأنه يلزم من
 كون عمود ه ر منزلا على القطر من نقطة د الواقعة على المحيط أن يكون
 وسطا متناسبا بين سهي د ه و ه و ومن يكون هذين السهمين
 مساويين لخطي أ و ب المعلومين ثبت المطلوب من أن يكون ذلك العمود
 وسطا متناسبا بين مقداري أ و ب

* (الدعوى الرابعة العملية) *

(شكل ١٤١) طريقة تقسيم خط أ ب المستقيم المعلوم الى قسمين بأن
 يكون القسم الاكبر وسطا متناسبا بين الخط الكامل والجزء الاصغر
 فيقام عمود د ح من نقطة د مساويا لنصف أ ب وتجعل نقطة ح
 مركزا ونصف قطر د ح يرسم محيط دائرة فاذا وصل أ ح يقطع محيط الدائرة
 في نقطة د فاذا أخذ أ و مساويا لخط أ د نقط أ ب ينقسم في نقطة و
 كما هو المطلوب يعني تكون نسبة أ ب : أ و :: أ و : و ب

لانه يلزم من كون خط $ا ب$ عمودا مخرجا من نهاية نصف قطر $د ه$ ان
 يكون خطا مماسا فاذا امتد خط $ا ب$ على استقامته حتى يقطع أيضا محيط
 الدائرة في نقطة $ه$ نخط $ا ه$ بصير قاطعا ومن ثمة كانت نسبة $ا ب$
 : $ا ه$:: $ا د$: $ا ب$ وحيث لازالت الاربعة المتناسبة متناسبة اذا
 كانت على طريق الفضل فتكون نسبة $ا ه$ — $ا ب$: $ا ب$::
 $ا ب$ — $ا د$: $ا د$ وحيث كان نصف قطر $د ه$ مساويا للنصف
 $ا ب$ بالعمل يكون $د ه$ مساويا لخط $ا ب$ ولذا يكون $ا ه$ —
 $ا ب$ = $ا د$ = $ا د$ وأيضا من $ا ب$ = $ا د$ او يكون $ا ب$ —
 $ا د$ = $د ه$ فاذا وضعت هذه الاشياء موضع مساواها من تناسب
 السابق فتكون نسبة $ا د$: $ا ب$:: $د ه$: $ا د$ او وبطريق
 العكس تكون نسبة $ا ب$: $ا د$:: $ا د$: $د ه$ وبما ثبت المطلوب
 تنبيه وثارة يسمى هذا التقسيم نسبة الوسط والطرفين يعني ان الخط المقسوم
 بطريق نسبة الوسط والطرفين هو ما كانت نسبته الى جزئه الاكبر كنسبة
 جزئه الاكبر الى جزئه الاصغر واعلم ان خط $ا ه$ ينقسم في نقطة $د$ على
 طريق نسبة الوسط والطرفين لانه يلزم من كون $ا ب$ = $د ه$ ان تكون
 نسبة $ا ه$: $د ه$:: $د ه$: $ا د$

(الدعوى الخامسة العملية)

(شكل ١٤٢) طريقة رسم خط $ا ب$ المستقيم المار من نقطة $ا$
 المفروضة داخل زاوية $د ه ب$ بأن يكون قسما $ا د$ و $ا ب$ الواقعان بين
 نقطة $آ$ وبين طرفي الزاوية المذكورة متساويين
 أقول مقي رسم خط $ا ه$ من نقطة $آ$ موازيا لخط $د ه$ وأخذ خط $ه ب$
 مساويا لخط $د ه$ ومربط خط $ا ب$ المستقيم من نقطتي $ا$ و $ب$ فهو الخط
 المطلوب

لانه يلزم من كون خط $ا ه$ موازيا لخط $د ه$ ان تكون نسبة $د ه$:
 $د ب$:: $ا ه$: $ا ب$ وحيث ان $د ه$ = $ه ب$ بالعمل يثبت ان يكون

ا - = اء

(الدعوى السادسة العملية)

طريقة انشاء مربع مكافئ لشكل متوازي الاضلاع معلوم أو مثلث مفروض (شكل ١٤٣) أولا اذا كان ا - ح د متوازي الاضلاع معلوماً و ا - قاعدة و د ه ارتفاعه أقول يستخرج ط ع الوسط المناسب بين قاعدة ا - و ارتفاع د ه وينشا على الوسط المذكور مربع ف ه - هذا المربع يصير مكافئاً لتوازي الاضلاع ا - ح د

لانه يلزم من كون نسبة ا - : ط ع :: ط ع : د ه ان يكون $\frac{ط ع^2}{ا - \times د ه}$ ومن كون مستطيل ا - ح د هو مساحة متوازي الاضلاع من أجل ذلك ثبت المطلوب ان يكون المربع المنشأ على ط ع مكافئاً لتوازي الاضلاع المفروض

ثانياً (شكل ١٤٤) اذا كان ح د قاعدة مثلث ا - ح د المفروض و اء ارتفاعه فيؤخذ الوسط المناسب بين قاعدة ح د ونصف ارتفاع اء وينشا على هذا الوسط مربع ف ه هذا المربع يكافئ مثلث ا - ح د

لانه يلزم من كون نسبة ح د : ط ع :: ط ع : اء بالعمل ان يكون $\frac{ط ع^2}{ح د \times \frac{1}{2} اء}$ وحيث ان ح د $\times \frac{1}{2} اء$ مساحة مثلث ا - ح د ثبت المطلوب من ان يكون المربع المنشأ على ط ع مكافئاً له

(الدعوى السابعة العملية)

(شكل ١٤٥) طريقة رسم مستطيل اء ه ط على خط اء المستقيم المفروض مكافئاً للمستطيل ا - ح د

فيستخرج الرابع المناسب لخطوط اء و ا - و ا ح وهو ا ط فالمستطيل الحادث من خطي اء و ا ط يكافئ مستطيل ا - ح د لانه يلزم من كون نسبة اء : ا - :: ا ح : ا ط بالعمل ان يكون اء $\times ا ط = ا - \times ا ح$ فإذا صار مستطيل اء ه ط مكافئاً لمستطيل ا - ح د وثبت

المطلوب

* (الدعوى الثامنة العملية) *

(شكل ١٤٨) طريقة تعيين نسبة مستطيل خطي أ و - المقروحين استطيل خطي ج و - المعلمين الآخرين بالخط

فاذا استخرج سه الرابع المناسب للثلاثة مقادير - و ج و د فالتسوية التي بين خط أ وخط سه تساوي النسبة التي بين مستطيلي أ - و ج و د
 \times

لانه يلزم من كون نسبة - : ج :: د : سه بالعمل ان يكون
 $\times \times = \times -$ ولكن في تناسب أ - \times : - : ج
 \times : - :: أ - \times : \times : الحاصل من عين نسبة واحدة
اذا وضع - \times سه عوضا عن مساويه ج \times د فتكون نسبة
أ - \times : - : ج \times : د :: أ - \times : - : سه \times : - فاذا
قسم هذا النسبة الاخيرة من هذا التناسب على مقدار - فلا خلل
في التناسب واذا يكون أ - \times : - : ج \times : د :: أ : سه
ويثبت المطلوب

(نتيجة) لاجل تعيين النسبة بين المربعين المنشأين على خطي أ و ج
المستقيمين يستخرج سه الثالث المناسب لخطي أ و ج بان تكون
نسبة أ : ج :: ج : سه وتضرب حدود هذا التناسب بحدود
أ : ج :: أ : سه الحاصل من نسبة واحدة حد بحد فتمكون
نسبة أ : ج :: أ \times : ج \times : سه وحيث لا خلل في التناسب
اذا قسم هذا النسبة الاخيرة على مقدار ج ثبت المطلوب من أن يكون
نسبة أ : ج :: أ : سه

* (الدعوى التاسعة العملية) *

(شكل ١٤٩) طريقة تعيين النسبة بين حاصل ضرب أ و - و ج

الثلاثة خطوط المعلومة وبين حاصل ضرب $د$ و $هـ$ و $و$ الآخر بالخط
أولاً يستخرج من الرابع المناسب لخطوط $د$ و $ا$ و $س$ المعلومة وكذا
يستخرج من الرابع المناسب لخطوط $د$ و $هـ$ و $و$ فالنسبة التي بين
س و $س$ كالنسبة بين حاصل $ا$ $س$ $د$ و $و$ وحاصل $د$ $س$ $هـ$ و
 $هـ$ $و$

لأنه من كون نسبة $د : ا :: س : د$ بالعمل يكون $ا$ $س$ $د$ =
 $د$ $س$ $هـ$.

فإذا ضربت كل واحدة من هذه الأشياء المتساوية بمقدار $د$ يصير
 $ا$ $س$ $د$ = $د$ $س$ $هـ$ $و$ وأيضاً يلزم من كون نسبة $د$
 $هـ$ $و :: د : س$ بالعمل ان يكون $د$ $س$ $هـ$ $و$ = $د$ $س$ $هـ$ $و$ فإذا
ضرب كل واحد من هذين المتساويين في مقدار $د$ يكون $د$ $س$ $هـ$ $و$ =
 $د$ $س$ $هـ$ $و$ فإذا وضعت هذه الأشياء والأشياء المتساوية المذكورة
من قبل في هيئة التناسب نصير $ا$ $س$ $د$ $هـ$ $و :: د : س$ $هـ$ $و :: د : س$
 $د$ $س$ $هـ$ $و :: د : س$ $هـ$ $و :: د : س$ فإذا قسم هذا النسبة الأخيرة على
مقدار $د$ $س$ $هـ$ $و$ فلا خلل ومن ثمة يثبت المطلوب من ان تكون $ا$ $س$ $د$
 $د$ $س$ $هـ$ $و :: د : س$ $هـ$ $و :: د : س$

(الدعوى العاشرة العملية)

طريقة انشاء مثلث مكافئ لشكل كثير الاضلاع معلوم
(شكل ١٤٦) أولاً لاجل انشاء مثلث مكافئ لشكل كثير الاضلاع $ا$ $س$ $د$ $هـ$
يفرق مثلث $د$ $هـ$ $و$ بموصل وتر $د$ $هـ$ ومن نقطة $د$ يرسم خط $د$ $و$ موازياً
لخط $د$ $هـ$ وملاقياً لخط $ا$ $س$ الخارج فاذا وصل خط $د$ $و$ فالشكل ذوا ربعة
اضلاع $ا$ $س$ $د$ $و$ الحادث يكافئ لشكل كثير الاضلاع $ا$ $س$ $د$ $هـ$ الذي له ضلع
زائد عنه * لأنه يلزم من اشتراك قاعدة $د$ $هـ$ في مثلثي $د$ $هـ$ $و$ و $د$ $و$ $هـ$
رؤسهما $د$ $و$ على خط $د$ $و$ الموازي لتلك القاعدة ان يكون ارتفاعهما
واحداً ويكونان متكافئين فاذا جمع على شكل $ا$ $س$ $د$ $هـ$ كل من هذين المثلثين

المتكافئين يحصل شكل كثير الاضلاع $ا ب د ه$ من جهة ومن الاخرى يحصل ذوا ربعة اضلاع $ا ب د ه$ و فلذا علم ان كثير الاضلاع يكافئ ذوا ربعة اضلاع واذا وصل وتر $ا د$ ورسم من نقطة $د$ خط $د ر$ موازيا لخط $ا ب$ ووصل $د ر$ كما مر يثبت ان يكون مثلث $ا د ر$ مكافئاً للمثلث $ا ب د$ وحينئذ يكون مثلث $د ر ه$ مكافئاً لذى أربعة اضلاع $ا د ر ه$ و اولئكائنه وهو مخمس $ا ب د ه ر$ يعنى ان المثلث المذكور يكافئ ذلك الشكل الكثير الاضلاع المقروض * وقس على هذا سائر الاشكال الكثيرة الاضلاع المستقيمة لان في هذا العمل يصير تنزيل آحاد الاضلاع مرة بعد اخرى حتى ينتهى الشكل الى مثلث تنبيهه يمكن انشاء مربع مكافئ لاي شكل مستقيم الاضلاع معلوم اذ تقدم انه يمكن تحويل المثلث الى مربع (على ٦) * وهذا العمل يسمى تربيع الشكل المستقيم الاضلاع

واما مسئله تربيع الدائرة فهي طريقة انشاء المربع المكافئ لدائرة معلومة القطر

(الدعوى الحادية عشرة العملية)

طريقة انشاء مربع مساو لمجموع مربعين معلومين اولاً لتفاضل بينهما (شكل ١٤٧) اذا كان $ا$ و $ب$ ضلعي المربعين المعلومين أولاً لاجل استخراج مربع مساو لمجموعهما ينشأ خطا $ا د$ و $ب د$ المستقيمان الغير المحذودين بان يكونا متعامدين فاذا اخذ $ه د$ مساوياً للضلع المربع المطلوب * لانه يلزم من كون مثلث $د ه ر$ قائم الزاوية ان يكون المربع المنشأ على وتر $د ر$ مساوياً لمجموع المربعين المنشأين على ضلعي $د ه$ و $د ر$ وثانياً اذا اردنا انشاء مربع يساوى التفاضل بينهما ترسم زاوية وهى القائمة ويؤخذ $ه ر$ مساوياً للضلع الاصغر من ضلعي $ا$ و $ب$ فاذا جعلت نقطة $ر$ مركزاً وبعد $ر ح$ المساوى للضلع الاكبر يرسم قوس دائرة يقطع خط $ه ح$ في نقطة $ح$ فالربع المنشأ على $ه ح$ يساوى التفاضل بين المربعين

المنشأين على خطى $ا و$ - * لانه يلزم من كون مثلث هـ د ح قائم الزاوية
ووتر د ح مساويا ضلع $ا$ وعمود هـ د مساويا لضلع - ان يكون المربع
المنشأ على هـ د يساوى التفاضل بين المربعين المنشأين على خطى $ا و$ -
ويثبت المطلوب

(تنبيه) بهذه الطريقة يمكن انشاء مربع بكافئ مجموع مربعات قدر ما يراد *
أو يكافئ التفاضل بين مجموع مربعات وبين مجموع مربعات آخر
لانه يمكن انشاء مربع يساوى مربعين وانشاء مربعين يساويان ثلاث مربعات
ومنه يمكن انشاء مربع واحد وهكذا الى آخره وقد يمكن بهذه الطريقة أيضا انشاء
مربع يساوى التفاضل بين مجموع مربعات وبين مجموع مربعات آخر
(* الدعوى الثانية عشرة العملية)

(شكل ١٥٠) المراد انشاء مربع نسبته الى مربع $ا د$ المقروض
كنسبة خط $ك$ الى $ل$

فاذا أخذ على خط هـ د المستقيم الغير المحدود هـ و مساويا لخط $ك و$ و
مساويا لخط $ل$ وجعل هـ د قطرا وانشئ عليه نصف محيط دائرة واقم عمود
د ح من نقطة د الواقعة على هذا القطر المنتهى الى محيط الدائرة ومن نقطة
ح يرسم وتر $ح ر و$ هـ ويمتد اذ جهة هـ و ر ويؤخذ ح د
مساويا لخط $ا ت$ ضلع المربع المعلوم ومن نقطة د يرسم خط ط د
موازيا لخط هـ د نقط $ح ط$ هو ضلع المربع المطلوب

لانه يلزم من كون ط د و هـ د متوازيين ان تكون نسبة ح ط :
ح د :: ح هـ : ح ر وحيث ان الاربعة المتناسبة مربعاتها متناسبة

تكون نسبة ح ط : ح د :: ح هـ : ح ر ولكن مثلث هـ د ح القائم
الزاوية فيه نسبة مربع ضلع ح هـ الى مربع ضلع ح د كنسبة سهم وهـ
الى سهم ور أو كنسبة مساويهما أى كنسبة خط $ك$ الى خط $ل$ وحيث ان

في هذا التناسب والذى سبق ح هـ : ح د مشتركة بينهما تكون نسبة

ح ط : ح ع :: ك : ل ولكن من كون ح ع = ا ب يقتضى ان تكون نسبة المربع المتشاعلى ح ط الى المربع المتشاعلى ا ب كنسبة خط ك الى خط ل ويثبت المطلوب

(الدعوى الثالثة عشرة العمالية)

(شكل ١٢٩) طريقة رسم شكل كثير الاضلاع على ضلع و ر نظير ضلع ا ب مشابه الشكل ا ب ح و ه كثير الاضلاع الآخر * فاذا رسم و ت ا د و ا د من الشكل كثير الاضلاع المعلوم ومن نقطة و ترسم زاوية د و ح مساوية لزاوية ا ب ح ومن نقطة د ترسم زاوية و د ح مساوية لزاوية ا ب ح فثلث و د ح الحادث من تلاقي خطى و ح و د فى نقطة ح يكون مشابها لثلث ا ب ح وكذلك يرسم مثلث و ط ح على ضلع و ح نظير ا ب ح مشابها لثلث ا ب ح ويرسم أيضا مثلث و ط ن على ضلع و ط نظير ا ب ح مشابها لثلث ا ب ح فكل كثير الاضلاع و د ح ط ن الحادث يصير مشابها لكثير الاضلاع المفروض وهو الشكل المطلوب

لانه قد تتركب من مثلثات متشابهة متحدة العدد متماثلة الوضع

(الدعوى الرابعة عشرة العملية)

اذا كان الشكلان المتشابهان معلومين وأريد انشاء شكل مشابه لهما ومساو لهما مجموعهما أو لهما تفاضل بينهما * أقول حيث ان ا ب و ب ح هما ضلعان متناظران فيهما فاذا أنشئ المربع المكافئ لمجموع المربعين المنشئين عليهما أو لهما تفاضل بينهما وكان ضلعه ب ح نظيرا لضلعى ا ب و ب ح فعلى ما فى الدعوى التى تقدمت الشكلى المتشاعلى هذا الضلع مشابه للشكلى المارقومين يكون هو المطلوب

لان نسبة الاشكال المتشابهة كنسبة مربعات اضلاعها المتناظرة وحيث ان المربع المتشاعلى ب ح مساو لمجموع المربعين المرسومين على ضلعى ا ب و ب ح أو لهما تفاضل بينهما يقتضى ان يكون الشكل المنشأ عليه مشابها للشكلى المعلومين مساويا لمجموعهما أو لهما تفاضل بينهما ويثبت المطلوب

(الدعوى)

(الدعوى الخامسة عشرة العملية)

المراد إنشاء شكل مشابه لـ شكل معلوم آخر بان تكون نسبة الشكل المطلوب الى الشكل المعلوم كنسبة مقدار م الى مقدار د المعلوم
فاذا فرض ضلع الشكل المعلوم آ وكان نظيره في الشكل المطلوب سم يلزم ان تكون نسبة م الى د كنسبة مربع آ الى مربع س (٢٧ مقالة ٣)
فيستخرج مقدار سم كما صرح به في الثانية عشرة العملية ويجزى باقي العمل كما ذكر في الدعوى الثالثة عشرة العملية ويثبت المطلوب

(الدعوى السادسة عشرة العملية)

(شكل ١٥١) طريقة اعمال شكل مشابه لـ شكل ك ومكافئ لـ شكل ل
فيستخرج م ضلع المربع المكافئ لـ شكل ك وكذلك يستخرج د
ضلع المربع المكافئ لـ شكل ل ويستخرج سم الرابع المتناسب لثلاثة
مقادير م و د و ا فاذا أنشئ شكل مشابه لـ شكل ك على ضلع سم
نظير ضلع ا فهذا الشكل المرسوم يكافئ شكل ل
لانه اذا أشبه الى الشكل المنشأ على الضلع سم بجرف ٤ فن تناسب

مربعات اضلاع الاشكال المتشابهة تكون نسبة ك : ٤ :: ا : ا
: سم ولكن من كون نسبة ا : سم :: م : د او ا : سم :
سم :: م : د بالعمل ولوجود التسوية المشتركة في هذا التناسب والذي
تقدم تكون ك : ٤ :: م : د وحيث ان م = ك و د =
= ل تكون نسبة ك : ٤ :: ك : ل ولتساوى المقدمين لزم
تساوى السالين ولذا يكون ٤ = ل ويثبت المطلوب من أن يكون
شكل ٤ مشابها ك ومكافئا لـ

(الدعوى السابعة عشرة العملية)

(شكل ١٥٢) طريقة رسم مستطيل بان يكون مجموع ضلعيه المتجاورين

مساويا لخط AB ومكافئاً للمربع C المعلوم * يرسم نصف محيط على أن يكون خط AB قطره ويحدد D المساوي لضع المربع المعلوم يرسم خط DE موازاً للقطر المذكور فإذا أنزل من نقطة H التي هي ملتقى الخط الموازي بالحيط عمود HO على ذلك القطر فخط AB و DE يكونان ضلعي المستطيل المطلوب يعني مستطيل $AO \times DE$ و DE يساوي مربع HO هو أو مربع AD ومن كون AD مساوياً لضع مربع C ثبت المطلوب من أن يكون $AO \times DE = C$

تنبيه شرط في إمكان إجراء عمل هذه الدعوى العملية أن يكون بعد D لا يتجاوز نصف القطر يعني لا بد أن يكون ضلع مربع C أصغر من نصف خط AB * (الدعوى الثامنة عشرة العملية)

(شكل ١٥٣) طريقة أعمال مستطيل يكون التقاضل بين ضلعيه المتجاورين مساوياً لخط AB المعلوم ومكافئاً للمربع C المقروض يرسم محيط دائرة على أن يكون خط AB قطرها ومن نهاية هذا القطر يقيم عمود AD مساوياً لضع المربع المعلوم فإذا رسم خط DE والقاطع المار بنقطة D ومركز الخط DE و DE هما الضلعان المتجاوران من المستطيل المطلوب

أولاً لأن التقاضل بينهما مساو هو أو قطر AB وثانياً لأن مستطيل $HO \times DE$ و DE يساوي مربع HO أي فثبت المطلوب من أن يكون ذلك المستطيل مكافئاً للمربع C * (الدعوى التاسعة عشرة العملية)

طريقة استخراج المقياس المشترك بين قطر المربع وضلعه أن كان بينهما مقياس مشترك

(شكل ١٥٤) إذا كان AB حراً مربعاً و AD قطره فلاجل معرفة اشكال قطر AD على ضلع AB كم مرة يلزم أن يوضع DE على قطر AD بأن تجعل نقطة D مركزاً ونصف قطر DE يرسم نصف دائرة و DE فضلع DE

يشغل عليه قطر $اح$ مرة ويقي $اى$ كسرا كجى خارج القسمة من هذا العمل الأول ١ و $اى$ كسر فيجب تعيين هذا الكسر بضلع $ح$ أو مساويه $ا$

فيؤخذ أو مساويا لكسر $اى$ وإذا وضع أيضا أو على $ا$ وقدر به فقسم أو يشغل عليه ضلع $ا$ مرتين وأيضا يقي كسر فلذا علم أنه إذا جرى العمل متواليًا بالكسور الباقية تصغر حتى تصير غير محسوسة بل تكاد تنعدم وأذن يكون ذلك العمل غير مقرون بصحة بل يصير عملا غير متناه فلذا حكم أنه لا مقياس مشترك بين خطى $اح$ و $حز$ لكن لا جرم أن إجراء العمل بواسطة الخطوط الباقية اتقى لاتزال على قدر واحد مع اجتناب تصغير الخطوط وتنقيصها السهل فلقيام زاوية $ا$ $حز$ يصير خط $ا$ مماسا وخط $اه$ قاطعا يخرج من نقطة التماس ومن ثمة كانت $اى : ا : ا : ا$: $ا$: $ا$: $ا$: $ا$ فلاجل تقدير $اى$ و $ا$ يمكن أن يؤخذ مكانها $ا$ و $اه$ في العمل الثانى لكن حيث أن $ا$ أو مساويه $ح$ $ا$ بعد خط $اه$ مرتين ويقي $اى$ كسرا خارج القسمة يكون عدد ٢ و $ا$ وحيث لم تعين كسر $اى$ بخط $ا$ فإذا اخذ خط $حز$ و $اه$ مكان $اى$ و $ا$ لكون $حز$ $=$ $ا$ يصير خارج القسمة في العمل الثالث ٢ و $اى$ كسرا فعلم أنه لا يزال يظهر كسرا بل انتهت نظرا إلى ذلك وعلم من هذا أن لا مقياس مشترك بين قطر المربع وضلعه كما صرح به أيضا في علم الحساب

لأنه قد علم أن النسبة بينهما $٢ : ١$: $ا$: $ا$ لأنه حاصل كسب اطلاع وأفرق هذه الدعوى بطريق الهندسة

* (تنبيه) * لقد ظهر أنه لا يمكن وجود نسبة بعدد حقيقي صحيح بين قطر المربع وضلعه الا تقريبا بواسطة الكسور المتسلسلة خارج القسمة من العمل الأول ١ و $اى$ كسرو من العمل الثانى والثالث وسائر الاعمال خارج القسمة

اثنان و اء كسر فلذا رقت تلك الكسور المتسلسلة ههنا

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \dots$$

فاذا حسبت هذه الكسور المتسلسلة الى الحد الرابع الذي في الابتداء يصير مقدارها $1 \frac{12}{24}$ او $\frac{36}{24}$ يعني ان النسبة التقريبية بين قطر المربع و ضلعه صارت :: ٤١ : ٢٩ وان حسبت حدود كثيرة من هذه المتسلسلة تزداد تلك النسبة تقريبا حتى تكاد تكون صحيحة

(المقالة الرابعة)

في بيان الاشكال المستقيمة الاضلاع عموما وخصوصا
في الاشكال الكثيرة الاضلاع المنتظمة ومقادير الدوائر ومساحاتها
المحدود

اذا كان كثير الاضلاع متساوي الاضلاع والزوايا يسمى منتظما وعموما كل
شكل مستقيم الاضلاع يكون منتظما اذا تساوت اضلاعه وزواياه حتى ان
المثلث المتساوي الاضلاع والمربع عدل كل منهما شكلا منتظما وقيل له ذه
الاشكال اشكال مضاعفة منتظمة

(الدعوى الاولى النظرية) *

كل شكلين منتظمين متساويين في عدد الاضلاع يكونان متشابهين
(شكل ١٥٥) مثلا اذا كان $a-b-c-d$ و $e-f-g-h$ كل مسدسين
منتظمين فمجموع الزوايا من كل منهما متساوي ثمانية قوائم
(مقالة ١) فتكون زاوية $r = a$ حيث كانت كل واحدة منهما سدس
ثمانى قوائم وايضا زاوية $r = c$ وزاوية $r = e$ وهكذا الى آخره
* ولا تنظام كل منهما لزم ان تكون اضلاع $a-b$ و $c-d$ و $e-f$ الخ متساوية
وكذا $r = c$ و $r = e$ و $r = g$ الخ فيحصل تناسب $a-b : c-d : e-f : g-h ::$
 $r : r : r : r$ فعلى هذا صارت الاضلاع المتناظرة
من هذين الشكلين متناسبة والزوايا متساوية وثبت المطلوب من أن يكونا
متشابهين (حد ٢ مقالة ٣)

نتيجة كثيرا الاضلاع المتحدان في عدد الاضلاع وعموما جميع الاشكال المستقيمة
الاضلاع المنتظمة المتحدة العدد تكون النسبة بين محيطها كالنسبة بين
اضلاعها المتناظرة والنسبة بين سطوحها كالنسبة بين مربعي اضلاعها
المتناظرة (٢٧ مقالة ٣)

* (تنبيه) * تتعين زاوية الشكل المنتظم بواسطة عدد الاضلاع كما تعينت زوايا الاشكال الكثيرة الاضلاع المتساوية الزوايا
* (الدعوى الثانية النظرية) *

(شكل ١٥٦) كل شكل مستقيم الاضلاع منتظم يمكن رسم دائرة خارجة مارة بجميع زواياه وداخله تنماس بجميع اضلاعه

الصورة الاولى مثلا اذا كان شكل $a - b - c - d$ الخ منتظما وتصور مرور محيط دائرة بثلاث نقط a و b و c بان تكون نقطة p مركزه ونزل عمود pe على وسط bc ووصل pa و pd فيمكن تطبيق ذى الاربعة الاضلاع $pe - c - d - a$ الحادث على $pe - a$ ذى الاربعة الاضلاع الاخر بان يكون ضلع pe مشترك بين الشكليين المذكورين ولتساوى زاويتي $pe - c$ و $pe - a$ لقيامهما فيطبق ضلع $c - d$ على مساويه $e - a$ وتقع نقطة d على نقطة a وحيث ان ذلك الشكل منتظم تكون زاوية $e - c - d = e - a$ ويقع d على استقامة ضلع $a - b$ ومن كون $d - c = a - b$ توجد نقطة d فوق نقطة a ويتساوى ذوا الاربعة الاضلاع المرقومان مع كمال الانطباق فبعد $pe - d$ يساوى أيضا pa ومن ثمة علم ان المحيط المار بثلاث نقط a و b و c يمر أيضا بنقطة d وبمثل هذا ثبت ان محيط الدائرة الذى يمر بنقط a و b و c يمر بنقطة d وهكذا على التوالى اى يمر برؤس سائر الزوايا ومن اجل ذلك ثبت المطلوب انه يمكن رسم محيط دائرة على كل منتظم

ثانيا حيث ان اضلاع $a - b - c - d$ الخ اوتار متساوية تنظر الى المحيط فتساوى ابعادها من المركز (٨ مقالة ٢) فلذا اذا جعلت نقطة p مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر pe فهذا المحيط يمر بمساوي وسط ضلع bc وبوسط كل من سائر اضلاع الشكل الكثيرة الاضلاع ومن اجل ذلك كان هذا المحيط هو المرسوم داخل كثير الاضلاع المماس بجميع اضلاعه او بصير ذلك الشكل مرسوما على ذلك المحيط وثبت المطلوب

* (تنبيه ١) * حيث صارت نقطة ط مركز الدائرة المرسومة داخلا وخارجا فهي مركزا لكل كثير الاضلاع المنتظم وزاوية ا ط ر الحاصلة من احاطة نصفي القطر الواصلين الى من ابقي ضلع ا ر تسمى مركزية * ولتساوى أوتار ا ر و ر ح الخ لتساوى سائر الزوايا المركزية وكل واحدة منها تساوى خارج القسمة من تقسيم أربع قوائم على عدد اضلاع الشكل الكثير الاضلاع * (تنبيه ٢) * لاجل رسم كثير اضلاع منتظم ما داخل الدائرة يقسم محيطها الى أقسام متساوية بعدد اضلاع ذلك الشكل ثم يوصل بين نقط التقسيم (شكل ١٥٨) لانه متى تساوت الاقواس تساوت اوتار ا ر و ر ح و ح د الخ فتساوى الاضلاع والزوايا من مثلثات ا ط و ر ط ح و ح ط د فلزم تساوى زوايا ا ر ح و ر ح د و د ه الخ التي هي أضلاع تلك الزوايا وتساوى الاضلاع والزوايا من شكل ا ر ح د ه الخ يظهر انقطاعه

* (الدعوى الثالثة العملية) *

طريق رسم المربع داخل الدائرة المعلومة

(شكل ١٥٧) فاذا رسم قطرا ا ح و ر د على ان يتقاطعا عودين ووصل بين نهايات ا و ر و ح و د فشكل ا ر ح د الحادث هو المربع المطلوب * لان أوتار ا ر و ر ح و ح د و د ا متساوية لتساوى زوايا ا ه ر و ر ه ح و ح د ه و د ه ا القوائم ولوقوع زوايا ا و ر و ح و د المحيطية في نصف الدائرة صارت كل واحدة منها قائمة ولذا ثبت المطلوب من أن يكون الشكل الرقيم مربعا

(تنبيه) حيث ان مثلث ر ه ح متساوى الساقين قائم الزاوية حصل تناسب ر ح : ر ه :: ٢ : ١ (١١ مقالة ٣) فتبين ان نسبة ضلع المربع المرسوم داخل الدائرة الى نصف القطر كنسبة جز ومربع عدد ٢ الى الواحد

* (الدعوى الرابعة العملية) *

طريق رسم المسدس المنتظم والمثلث المتساوي الاضلاع داخل الدائرة
المعلومة

(شكل ١٥٨) لاجل حل هذه الدعوى يفرض ان $ا$ ضلع من اضلاع
المسدس المراد رسمه داخل الدائرة ويرسم نصف قطر $ا ط$ و $ط$ ثلث
 $ا ط$ الحادث يكون متساوي الاضلاع * لان زاوية $ا ط ر$ سدس
اربع قوائم فاذا جعلت القائمة أحد ازاوية $ا ط ر = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ وأيضا
يصير مجموع زاويتي $ا ط و ر$ الاخرين منه $(2 - \frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$
او $\frac{2}{3}$ وحيث ان هاتين الزاويتين متساويتان يكون مقدار كل واحدة منهما
 $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ فصار مثلث $ا ط ر$ متساوي الاضلاع لتساوي زواياه الثلاث
فظهر ان ضلع المسدس المرسوم داخل الدائرة مساو لنصف القطر * فاذا وضع
نصف القطر المرسوم ودور على المحيط فالأخير منه ينطبق آخره بنهاية الاول في نقطة
الابتداء وينقسم به محيط الدائرة الى ستة أقسام متساوية فاذا وصلات الاوتار
حدث المسدس المطلوب

وماعدا هذا مق وصل بين كل اثنين على التوالي من رؤس زوايا مسدس $ا ر ح و$
هو مع ترك اخرى بينهم يحدث احد المثلث المتساوي الاضلاع *
(تنبيه) حيث ان $ا ر = ر ح = ح ط = ط ا$ فيه يكون شكل
 $ا ر ح ط$ متوازي الاضلاع معينا (١٤ مقالة ٣) فصار $\frac{ا ر}{ا ط} + \frac{ا ط}{ا ر} = \frac{ا ر}{ا ط} + \frac{ا ط}{ا ر}$ يعني
مجموع مربعي القطرين يساوي مجموع مربعات الاضلاع الاربعة أي $\frac{ا ر}{ا ط} + \frac{ا ط}{ا ر} = \frac{ا ر}{ا ط} + \frac{ا ط}{ا ر}$
أو $\frac{ا ر}{ا ط} = \frac{ا ط}{ا ر}$ * فاذا طرح من كل من هذين المتساويين مربع $\frac{ا ر}{ا ط}$ يكون
 $\frac{ا ر}{ا ط} = \frac{ا ط}{ا ر}$ ٣ فاذا وضعت هذه المتساوية في صورة التناسب يصير $ا ر : ا ط = ا ط : ا ر$
: $\frac{ا ر}{ا ط} :: ٣ : ١$ أو $ا ر : ا ط :: ٣ : ١$ فلذا ظهر ان
النسبة بين ضلع المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخل الدائرة وبين نصف
القطر كالنسبة بين جوار مربع عدد ٣ وبين الواحد

(الدعوى الخامسة العملية) *

طريقة رسم المعشر المنتظم والخمسين المنتظم وذى الخمسة عشر ضلعا المنتظم داخل الدائرة المعروفة

(شكل ١٥٩) أقول اذا قسم نصف قطر $اع$ في نقطة $م$ على نسبة الوسط والطرفين (٤ على مقالة ٣) واخذوتر $ا-م$ مساويا لقسم $م-ع$ الاكبر فهو ضلع المعشر المنتظم * فاذا دور على المحيط عشر مرات يقسم المحيط الى عشرة أقسام متساوية * لانه اذا وصل $م-ت$ نصير $ا-ع : ع : م :: ع : م :: ا-م$ بالعمل ومن كون $ا-م = م-ع$ فاذا وضع مكانه يكون $ا-ع : ا-م :: ا-م : ا-ع$ ولاشتركة الزاوية في مثلث $ا-م-ع$ و $ا-م-ع$ مع تناسب الاضلاع المحيطية به الزم ان يكون هذان المثلثان متشابهين (٢٠ مقالة ٣) وتساوى ساقى مثلث $ا-ع-م$ مثلث $ا-م-ع$ المشابهة ايضا يكون متساوى الساقين ويكون $ا-م = م-ع$ ولكن $ا-م = م-ع$ فصار $م-ع = م-ع$ فيكون مثلث $م-ع-ا$ ايضا متساوى الساقين فزاوية $ا-م-ع$ الواقعة خارجة مثلث $م-ع-ا$ المتساوى الساقين ضعف زاوية $ع$ الواقعة داخله (مقالة ١) وحيث ان زاوية $ا-م-ع = م-ا-ع$ فصار كل من زاويتي $ع-ا-م$ و $ع-ا-م$ الواقعتين على قاعدة مثلث $ا-ع-م$ ضعفا لزاوية $ع$ الرأسية فعمل ان مجموع ثلاث زوايا المثلث المذكور خمسة أمثال زاوية $ع$ فكانت هي خمس قائمتين أو عشر أربع قوائم فقس $ا-م$ بصير عشر محيط الدائرة وثبت المطلوب من أن يكون وتر $ا-م$ هو ضلع المعشر المطلوب

(نتيجة ١) متى وصل بين كل زاويتين منه غير متجاورتين على التوالي يحصل خمسين احد ه ر ط

(نتيجة ٢) متى كان $ا-م$ ضلع المعشر و $ا-ل$ ضلع المسدس فقس $م-ل$ بصير $(\frac{1}{6} - \frac{1}{11})$ أو $\frac{1}{10}$ نظرا الى المحيط

فوتر $م-ل$ يكون ضلع كثير الاضلاع المنتظم ذى الخمسة عشر ضلعا ولاجرم ان

قوس δ هو تلك قوس δ

(تنبيه) متى رسم كثير الاضلاع داخل الدائرة وقسمت الاقواس الموزعة لاضلاعه
بمساويين ووصلت أوتار انصاف الاقواس فيحصل كثير الاضلاع عددا لاضلاعه
ضعف عدد اضلاع الاول * فلذا استعمل المربع لانشاء ~~كثير~~ كثير الاضلاع
ذى ٨ و ١٦ و ٣٢ الخ والمسدس لذى ١٢ و ٢٤ و ٤٨ الخ
والعشر لذى ٢٠ و ٤٠ و ٨٠ الخ * وذو النجمة عشر لذى ٣٠ و ٦٠
و ١٢٠ الخ وهكذا على التوالي

اعلم انه من سنين متعددة كان لم ~~يكن~~ رسم كثير الاضلاع داخل الدائرة
بطريق الهندسة والدرجة الاولى والثانية من علم الجبر الاما قد ذكر ~~هنا~~ هذا
عند السلف لكنه تبين باسناد الى المهندس غوس النمساوى ذكره فى كتابه الذى
طبع فى ناحية ساقسونيا سنة ألف وثمانمائة وواحد من تاريخ الميلاد ان قد
أمكن رسم كثير الاضلاع ذى السبعة عشر ضلعا داخل الدائرة وعموما علم
ان للشكل المنتظم ذى n من الضلع قابلية ان يرسم داخل الدائرة
الان n + ١ يلزم ان يكون عددا أوليا فى كل حال

(الدعوى السادسة العملية)

(شكل ١٦٠) طريق انشاء كثير الاضلاع على الدائرة مشابه بالشكل ا ح د
الخ الكثير الاضلاع المقروض المرسوم داخل تلك الدائرة

أقول اذا رسم خط $ر ح$ المماس من نقطة $م$ وسط قوس $ا ب$ فهذا المماس
يصير موازيا للضلع $ا ب$ (١٠ مقالة ٢) وكذا اذا رسمت الخطوط المماسية من
اواسط اقواس $د ح$ و $ه ح$ الخ فن تلاقى تلك الخطوط المماسية يحصل كثير
الاضلاع $ر ح ط$ الخ خارج الدائرة ويكون مشابه بالشكل كثير الاضلاع
المعلوم المرسوم داخلها وتقع نقط $ق$ و $ث$ و $ح$ الثلاثة على خط مستقيم
واحد كما لا يخفى

لان فى مثلثي $ق م ح$ و $ق ح د$ القائى الزاوية وتر $ق ح$ مشترك وضلع
 $ق م$ مساو لضلع $ق د$ فهذان المثلثان يتساويان اتساوى الوتر والضلع فيهما

(مقالة ١) وتكون زاوية م ح مساوية لزاوية ح ق د فلذا خط ق ح المستقيم يمر بنقطة ر وسط قوس م د * وبمثل هذا يثبت ان تقع نقطة ط على استقامة خط ق د وكذا سائر النقاط ومن توازي خط ر ح لضع ا - وخط ح ط لضع ر ح فزاوية د ح ط تساوي زاوية ا ر ح (مقالة ١) وكذا زاوية ح ط س و ر ح وكذا باقي الزوايا فـ تكون زوايا الشكل المرسوم على الدائرة مساوية لزوايا الشكل المرسوم داخلها وتوازي اضلاعها تكون د ح : ا ر :: ق ح : ق د وكذلك ط ح : ر ح :: ق ح : ق د ولوجود النسبة المشتركة تكون د ح : ا ر :: ح ط : ر ح ولكون ا ر = ر ح يكون د ح = ح ط * وبمثل هذا ثبت ان يكون ح ط = ط س وكذا الباقى * فمن تساوى اضلاع الشكل المرسوم على الدائرة يقتضى ان يكون منتظما وثبت المطلوب من أن يكون مشابها للشكل المرسوم داخلها

(نتيجة ١) وبالعكس اذا كان كثير الاضلاع د ح ط س الخ المرسوم فوق الدائرة مغالوما مفروضا وأريد ان يرسم بواسطة شكل ا ر ح د الخ كثير الاضلاع داخل الدائرة فحسب ان وصل خطوط ق د و ق ح و ح ط الخ المستقيمة من د و ح و ط الخ رؤس زوايا كثير الاضلاع المعلوم * فاذا رسمت أوتار ا س و ر ح و ح ط الخ بين ا و ر و ح الخ نقاط تقاطع محيط الدائرة بالخطوط الموصولة يحدث الشكل الكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة وايضا اذا وصلت أوتار م د و د س بين م و د و س الخ نقاط التماس يحدث الكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة المشابه للكثير الاضلاع المرسوم عليها

(نتيجة ٢) كافة كثير الاضلاع التي يمكن رسمها داخل الدائرة ايضا يمكن ان ترسم خارجها وعكسا

(الدعوى السابعة النظرية) *

مساحة كثير الاضلاع المنتظم تساوى حاصل ضرب محيطه في نصف نصف قطر

الدائرة المرسومة داخله

(شكل ١٦٠) مثلاً إذا كان دح طء الخ كثير الاضلاع منتظماً كما يرى من هذا الشكل فمساحة مثلث دح طء تكون دح $\times \frac{1}{4}$ د م وأيضاً مساحة مثلث دح طء تكون طح $\times \frac{1}{4}$ د م ومن كون د م = د م فمساحة المماسين تكون (دح + طح) $\times \frac{1}{4}$ د م فإذا أجرى العمل المذكور لأجل مساحة سائر المثلثات الأخر المشتمل عليها كثير الاضلاع فمساحة جميع المثلثات أو كثير الاضلاع الكامل تساوى حاصل ضرب قواعد دح و دح ط و طء الخ أو محيط كثير الاضلاع \times في $\frac{1}{4}$ د م يعنى نصف نصف القطر ويثبت المطلوب

(تنبيه) د م نصف قطر الدائرة المرسومة داخل كثير الاضلاع هو عين العمود النازل من المركز على أحد اضلاعه

(الدعوى الثامنة النظرية)

نسبة محيطى الاشكال الكثيرة الاضلاع المتحددة فى عدد الاضلاع المنتظمة كنسبة أنصاف اقطار الدوائر المرسومة داخلها وخارجها * ونسبة سطوحها كنسبة مربعات تلك الانصاف الاقطار

(شكل ١٦١) مثلاً إذا كان ا - أحد أضلاع شكل منها ونقطة ه مركزه نقط اه هو نصف قطر الدائرة المرسومة عليه وعمود هـ النازل على ا - هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخله * وايضاً إذا كان دح ضلع كثير الاضلاع الأخر ونقطة ط مركزه فيصير ط د و طء نصفي قطر الدائرة الداخلة والخارجة ومن كون كل من ا و د نصف زاويتى كثير الاضلاع فهما متساويتان وكذا زاويتا ر و ح فمثلثا ا - هـ و دح ط يتشابهان وكذا مثلثا ا هـ و د طء القائم الزاوية فصارت ا - : دح :: ا هـ : د ط :: د هـ : طء فعلم ان نسبة محيطى الشكلين كنسبة ا هـ و د ط نصفي قطري الدائرتين المرسومتين عليهما وكنسبة د هـ و د ط نصفي قطري الدائرتين المرسومتين داخلهما

وحيث كانت نسبة كثيرى الاضلاع المذكورين كنسبة مربعى ضامى ا-
و ر ح المتناظرين ثبت المطلوب من أن تكون النسبة بينهما كالنسبة بين
مربعى ا هـ و ر ط نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين خارجهما أو كالنسبة
بين مربعى د هـ و ع ط نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين داخلهما وهو
المراد

* (الدعوى التاسعة الفائدة) *

(شكل ١٦٢) كل خط منحنى أو منكسر كثرت اضلاعه محبب بخط ا م - المحبب
من نهايته الى الاخرى أطول من خط ا م - المحاط
فالمراد من المحبب هو الخط المنحنى او المنكسر الذى كثرت اضلاعه أو ما تركب
منه - ما هو الذى لا يقطعه المستقيم الا فى نقطتين اثنتين بخط ا م - اذا كان
مفساريا او كان له اجزاء متداخلة فلا يدعى محببا * لانه حينئذ يمكن ان يقطعه
المستقيم فى اكثر من نقطتين واما محيط الدائرة فمحبب ولا جرم * الا ان هذه
القضية لم يختص بحيط الدائرة فقط بل تشمل على كل خط وجدت فيه شروط
التحديق التى ذكرت

أقول ان لم يكن خط ا م - أصغر من كل ما أحاطه من الخطوط فلا بد أن يوجد
بين تلك الخطوط المحيطة خط أصغر من كل منها فيجب ان يكون ذلك الموجود اما
اصغر من خط ا م - واما - او ياله
منلا اذا فرض خط ا ح هـ - أصغر الخطوط المحيطة في رسم خط و ر مماسا لخط
ا م - من أى جهة فخط و ر المماس المرقوم يكون أصغر من خط و ر هـ و
لانه مستقيم وأقرب بعددين النقطتين * فاذا اخذ و ر بدلا عن قسم و ر هـ و
نقط ا و ر - بصير أصغر من خط ا و ر - لكن قد فرض ان ا و ر - اصغر
جميع الخطوط المحيطة فصار ذلك القرض فاسدا لوجود ما هو اصغر منه ومن ثمة
تبين ان خط ا م - اصغر من كل ما أحاطه

(شكل ١٦٣) تنبيه خط ا م - المحاط لا يزال أصغر من كل ما أحاطه سواء كان
مدورا كالشكل أو مماسا لخط و ر ح المحيط المماس فى نقطة و أو غير مماس

به في نقطة ما وبينهما انفتاح دائر اما دار فهو كما صرح به في هذه الدعوى

(الدعوى العاشرة الفائدة)

في كل دائرة يمكن ان يرسم على محيط الصغرى منها شكل كثير الاضلاع منتظم بشرط ان لا يلتقي بمحيط الكبرى وداخل الكبرى آخر بشرط ان لا يلتقي مع محيط الصغرى وعلى كل لاتزال اضلاع الشكل المرسوم واقعة بين محيطي الدائرتين

(شكل ١٦٤) مثلا اذا كان α و β تصني قطري الدائرتين المقروضتين فيرسم خط $\alpha\beta$ المماس للمحيط الاصغر في نقطة α المنتهي الى المحيط الاكبر بنقطتي γ و δ فعلى ما تقدم من الدعوى العمالية اذا رسم في الدائرة الكبرى كثيرا اضلاع منتظم وقسمت الاقواس الموتره لاضلاع الى اقسام متساوية ووصلت اوتارها فيحدث شكل كثيرا الاضلاع منتظم ضاعف عدد اضلاعه نظرا للقول فاذا اجرى العمل على المنوال المحرر متواليا يحدث قوس اصغر من قوس $\alpha\beta$ فاذا سمى هذا القوس الاصغر $\alpha\beta$ ووسطه γ ولبعد وتر $\alpha\beta$ عن المركز من وتر $\alpha\beta$ ظهران كثيرا الاضلاع المنتظم الذي ضلعه $\alpha\beta$ لا يلتقي بمحيط الدائرة التي نصف قطرها $\alpha\beta$ وكذا يجري على الدائرة الصغرى فاذا وصل $\alpha\beta$ و $\gamma\delta$ فيتقاطعان بمماس $\alpha\beta$ في نقطة ϵ و ϵ فيصير كل ضلع كثيرا الاضلاع المرسوم على الدائرة الصغرى المشابه لكثيرا الاضلاع المرسوم داخل الدائرة الكبرى الذي ضلعه $\alpha\beta$

وحيث ان خط $\alpha\beta$ اصغر من خط $\gamma\delta$ ظهران كثيرا الاضلاع المرسوم على الدائرة الصغرى وضلعه $\alpha\beta$ لا يلاق محيط الدائرة الكبرى فلذا لم انه اذا أجرى العمل كما تقدم يمكن ان يرسم داخل الدائرة الكبرى شكل كثيرا الاضلاع منتظم بان يكون محيطه بين محيطي الدائرتين ويرسم آخر مشابه له على الدائرة الصغرى كما لا يخفى

تبينه يمكن ان يرسم جزء من كثيرا الاضلاع المنتظم داخل اكبر قطاعي $\alpha\beta$ و $\gamma\delta$ وآخر مشابه له على الاصغر بان يكون هذان الجزآن محاطين بين

المحيطين وفيه يكفى بتقسيم قوس و سر الى اقسام ٢ و ٤ و ٨ و ١٦ الخ المتساوية متوالية حتى يصير القسم منه اصغر من قوس و سر وفي هذا الباب قسم المنتظم يطلن على الشكل الحاصل من احاطة نصفي قطر و اوتار متساوية مرسومة من نهاية قوس و ر الى نهايته الاخرى و سميت تلك الاوتار المتساوية كلها اطرافا و اضلاعا لقسم المنتظم المرقوم هذا وان وجدت فيه خواص كثير الاضلاع المنتظم وهي تساوى الاضلاع والزوايا وامكان رسم محيط الدائرة داخله وخارجيه لكن لا يطلق عليه انه قسم كثير الاضلاع الا اذا اشتمل محيط الدائرة على قوسه اشتمالاتا

(الدعوى الحادية عشرة النظرية)

(شكل ١٦٥) النسبة بين محيطى الدوائر كالنسبة بين انصاف أقطارها والنسبة بين سطوحها كالنسبة بين مربعات أنصاف أقطارها

اقتصارا للافادة بشار الى محيط الدائرة التى نصف قطرها ح ا بمحيط ح ا الى التى نصف قطرها ط ب بمحيط ط ب فعلى منطوق هذه الدعوى نصير نسبة محيط ح ا : محيط ط ب :: ح ا : ط ب

لانه ان لم يكن كذلك لكان الرابع المتناسب اكبرا واصغر من محيط ط ب مثلا اذا فرض انه اصغر منه بان تكون ح ا : ط ب :: محيط ح ا : محيط ط ب فاذا رسم كثيرا اضلاع المنتظم ه و ر كله داخل دائرة ط ب بان لا يتقاطع بمحيط دائرة ط ب وأيضا يرسم كثيرا اضلاع آخر م د ه س ع م مشابهة داخل دائرة ح ا فتكون النسبة بين مجموعي اضلاع هذين المنتظمين كالنسبة بين ح ا و ط ب نصفي قطري الدائرتين المرسومتين عليهما وذلك للتشابه بينهما اعنى ان تكون م د ه س ع م : ه و ر ك ه :: ح ا : ط ب امكن حيث فرضت ح ا : ط ب :: محيط ح ا : محيط ط ب ولتساوى النسب في هذين التناصبين تكون م د ه س ع م : ه و ر ك ه :: محيط ح ا : محيط ط ب وهذا خلاف * لانه يلزم من كون مجموع اضلاع م د ه س ع م اصغر من محيط ح ا المرسوم عليه ان يكون مجموع ه و ر ك ه

ايضاً أصغر من محيط ط د ومستحيل ان يكون المحيط أصغر من المحيط فلذا لا يمكن ان تكون نسبة د الى ط كنسبة محيط د الى محيط أصغر من محيط ط د كما صرح به

وكذا لا يمكن ان تكون نسبة د الى ط :: محيط د : محيط أكبر من محيط ط د * لانه اذا جعلت النسبة عكسية وكانت نسبة ط د الى د كنسبة محيط أكبر من محيط ط د الى محيط د أو كنسبة محيط ط د الى محيط أصغر من محيط د كذلك يكون عين ما صرح به ومن ثمة لا يمكن أن تكون نسبة نصف القطر الاول الى نصف القطر الثاني الا كنسبة المحيط المرسوم بنصف القطر الاول الى المحيط المرسوم بنصف القطر الثاني ولا محالة لما ثبت في الشطر الاول من هذه الدعوى ومن أجل ذلك استحال ان يكون الحد الرابع من تناسب د : ط :: محيط د : د أكبر أو أصغر من محيط ط د وثبت المطلوب من ان تكون نسبة المحيط الى المحيط كنسبة نصف القطر الى نصف القطر وحيث ان الشطر الثاني من هذه الدعوى اثباته عين الاول وكذا النتيجة الاتية حلها واثباتها فلا حاجة لتفصيل آخر في هذا الباب

نتيجة (شكل ١٦٦) النسبة بين قوسى ا - و ده المتشابهين كالنسبة بين نصفي قطري ا د و د ط والنسبة بين قطاعي ا د - و د ط ه المتشابهين كنسبة مربعيهما

لانه من تشابه القوسين يلزم ان تكون زاوية د مساوية لزاوية ط (حد ٣ مقالة ٣) فنسبة زاوية د الى أربع قوائم كنسبة قوس ا - الى محيط ا د الكامل (١٧ مقالة ٢) وأيضاً نسبة زاوية ط الى أربع قوائم كنسبة قوس ده الى محيط ط د فعلم ان النسبة بين قوسى ا - و ده كالنسبة بين محيطيهما وعلى ما صرح به آنفاً النسبة بين المحيطين كالنسبة بين نصفي قطري ا د و د ط

فظهر ان نسبة قوس ا - : قوس ده :: ا د : د ط وبمثل هذا يثبت ان النسبة بين قطاعي ا د - و د ط ه كالنسبة بين الدائرتين

الكاملتين * وحيث ان النسبة بين الدائرتين كالنسبة بين مربعي نصفي القطرين

$$\text{صارت نسبة قطاع } \alpha\text{ـب : قطاع } \alpha\text{ـط :: } \frac{\alpha}{\tau} : \frac{\tau}{\tau}$$

(الدعوى الثانية عشرة النظرية)

مساحة الدائرة تساوى حاصل ضرب محيطها بنصف قطرها

(شكل ١٦٧) فاختصارا للافادة اذا اشير الى مساحة الدائرة التي نصف

قطرها α بمساحة α ومحيطها بمحيط α فعلى منطوق الدعوى مساحة

$$\alpha = \frac{1}{\alpha} \times \alpha \times \alpha$$

لانه ان لم يكن حاصل $\frac{1}{\alpha} \times \alpha$ محيط α مساحة للدائرة التي نصف قطرها α يلزم ان تكون مساحة لدائرة أصغر

أو أكبر من تلك الدائرة

أولاً لو فرض انه مساو لمساحة دائرة أكبر منها مثلاً وكان $\frac{1}{\alpha} \times \alpha$ محيط α

= مساحة α أعني دائرة نصف قطرها α فاذا رسم كثير الاضلاع

دهور الخ المنتظم على محيط α بان لا يتقاطع بمحيط α فمساحة ذلك

المنتظم تساوى حاصل ضرب مجموع اضلاعه دهو + هو + ودر الخ

بقدر $\frac{1}{\alpha}$ لكن حيث ان كثيرا الاضلاع أحاط بمحيط الدائرة التي رسم عليها

من كل جانب وقد تقدم ان كل محيط أكبر من كل محيط فمساحة كثيرا الاضلاع

دهور الخ أكبر من حاصل $\frac{1}{\alpha} \times \alpha$ محيط α الذي فرض انه مساو

لمساحة الدائرة التي نصف قطرها α فلزم أن يكون كثيرا الاضلاع المرقوم أكبر

من الدائرة التي أحاطت به وهو محال فلذا حاصل $\frac{1}{\alpha} \times \alpha$ محيط α ثبت

انه لا يكون أعظم من مساحة α يعنى لا يكون حاصل ضرب محيط الدائرة

بنصف نصف قطرها أكبر من مساحتها كما لا يخفى

ثانياً لا يمكن أن يكون $\frac{1}{\alpha} \times \alpha$ محيط α مساحة لدائرة أصغر منها

اختصاراً تجعل دائرة α هي المفروضة

فان قبل يمكن أن يكون $\frac{1}{\alpha} \times \alpha$ محيط α = مساحة α فيعبر

العمل على ما تقدم ويرسم كثيرا الاضلاع دهور الخ المنتظم فمساحته حاصل

ضرب (دهو + هو + ودر + الخ) $\times \frac{1}{\alpha}$ لكن حيث ان مجموع

اضلاع $د ه + ه و + و ر + الخ$ أصغر من محيط $د$ المحيط به
 يلزم ان تكون مساحة كثير الاضلاع أصغر من حاصل $\frac{1}{4} د$ محيط $د$
 وأيضا يجب ان تكون أصغر من مقدار $\frac{1}{4} د$ محيط $د$ واذا
 فرض انه مساو لمساحة الدائرة التي نصف قطرها $د$ فعلى هذا يلزم ان يكون
 كثير الاضلاع أصغر من الدائرة التي أحاط بها وهذا باطل محض ومن ثمة تحقق
 ان حاصل ضرب محيط دائرة في نصف نصف قطرها لا يكون مساويا لمساحة دائرة
 أصغر منها فسلم ان حاصل ضرب محيط الدائرة بنصف نصف قطرها يساوي
 مساحتها قطعها ونبت المطلوب

(نتيجة ١) (شكل ١٦٨) مساحة قطاع الدائرة مساوية لحاصل ضرب قوسه
 بنصف نصف قطره

لان نسبة قطاع $ا د$ الى الدائرة الكاملة كنسبة قوس $ا م$ الى محيط
 $ا د$ الكامل (١٧ مقالة ٢) أو كنسبة قوس $ا م$ الى $\frac{1}{4} د$ الى محيط
 $ا د$ الى $\frac{1}{4} د$ وحيث ان مساحة الدائرة = محيط $ا د$ الى $\frac{1}{4} د$
 تبين ان مساحة قطاع $ا د$ أيضا = $ا م$ الى $\frac{1}{4} د$

(نتيجة ٢) اذا رمز الى محيط الدائرة التي قطرها واحد بحرف $ط$ ولو حفظ ان
 نسبة المحيطين كنسبة نصف قطريهما أو قطريهما فقد يمكن وضع ما سياتي
 من التناسبات اعني نسبة قطر $ا$ الى محيطه $ط$ كنسبة قطر $٢ د$ الى محيط
 الدائرة التي نصف قطرها $د$

يعني (شكل ١٦٥) $١ : ط :: ٢ د : محيط د$ فعلى هذا محيط $د$
 $= \frac{٢ د \times ط}{٢} = د \times ط$ فاذا ضرب كل من هذين المتساويين في
 $\frac{1}{4} د$ يصير محيط $د$ الى $\frac{1}{4} د$ = $ط$ الى $\frac{1}{4} د$ أو مساحة $د$ = $ط$

$\times \frac{1}{4} د$ فلذا ظهر ان تكون مساحة الدائرة مساوية لمربع نصف قطرها مضروبا
 في عدد $ط$ وهو محيط الدائرة التي قطرها واحد وتكون مساوية لحاصل ضرب
 مربع نصف القطر فيما بين القطر والمحيط من النسبة كما لا يخفى

وكذلك مساحة الدائرة التي نصف قطرها ور = ط \times ور^٢ لكن
حيث ان النسبة بين مقداري ط \times آ^٢ و ط \times ور^٢ كنسبة آ^٢ الى
ور^٢ صارت ط \times آ^٢ : ط \times ور^٢ :: آ^٢ : ور^٢ فنظر الى هذا
التناسب تبين أن النسبة بين مساحات الدوائر كنسبة مربعات أنصاف أقطارها
وفيه تصديق كافى وتوافق شافى للدعوى التي تقدمت

تبيينه مسئله تربيع الدائرة كناية عن اعمال مربع مكاف لدائرة نصف قطرها
معلوم وقد تبين ذلك ههنا وثبت ان مساحة الدائرة تكافى المستطيل الحاصل
من ضرب محيطها بنصف قطرها ولا جرم انه يمكن تحويل هذا المستطيل
الى مربع باستخراج الوسط المتناسب بين البعدين المرقومين (٦ مقالة ٣)
فعلم ان مسئله تربيع الدائرة لا توقف الاعلى استخراج مقدار محيط الدائرة
المعروفة القطر فقط ففى وجود النسبة بين نصف القطر والقطر وبين المحيط كفاية
لاستخراج ذلك

الى الآن لم يكن استخراج هذه النسبة على طريق التحقيق وانما صار
استخراجها على سبيل التقريب ولكن بطريق حساب المتواليات والكسور
المسلسلة صارت تلك النسبة فى اقصى درجة من التقريب بحيث لو وجدت
النسبة الحقيقية فلاثرة فيها وقبل ان يعلم حساب المتواليات على وجه الاتقان
كان المهندسون المتقدمون يصرفون الالهامان ما استطاعوا فى حل هذه المسئلة
والآن صارت فى حيز الالهام ولكن لاجل تدريب اذهان المبتدئين وتوسيع
مبادئ افكارهم اجتمعت من المهندسين المتقدمين مهندس يسمى ارشميد
فاظهر واثبت ان النسبة بين محيط الدائرة وقطرها هى $\frac{1}{\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{3}}$
يعنى $\frac{1}{\sqrt{3}}$ او $\frac{\sqrt{3}}{3}$ وهو ما رمزنا له بحرف ط وهو محيط الدائرة التي قطرها
واحد وحيث ان اول كسر من هذين الكسرين اسهل ما يكون صار استعماله
جاريا ومن المتقدمين مهندس يسمى مسيوس استخراج مقدار هذه النسبة

اشد قربا مما ذكر وهو $\frac{300}{113}$ وبالجملة استخراج معرفة مهندس الخلف مقدار
ط بطريق الكسور الاعشارية وقدموها الى درجة التقريب ما استطاعوا
حتى وصلوا الى هذه الاعداد

١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢ و٣ وقد موا هذا الكسر الى خانة المائة
والعشرين وخانة المائة والاربعين وهذه الكسور التي تقدمت الى هذه الدرجة
حصل بها التقريب الكلي كما لا يخفى ولا جرم ان في استخراج جذر العدد الاصم
لم يعلم اكثر مما ذكر حتى ان حضرة علي رضي الله تعالى عنه وكرم الله
تعالى وجهه حين مثل عن جذر العدد الاصم اهو موجود ام لا فقال لا يعلم
جذر الاصم الا هو * وقال بعضهم ان هذا الكلام لم يصدر عن علي رضي
الله تعالى عنه حيث ان جذر الاصم لا وجود له حتى ان عليا رضي الله تعالى
عنه يقول ان الله تعالى يعلمه فعل هذا الوجه يعلم ان هذا الكلام لم ينقل
عن علي ولا عن غيره من ادل التوحيد لانه محض كفر لاسناد الجهل المركب له
تعالى وتنزه مولانا عن كل وصف لا يليق به واما حضرة قنوجي زاده محمد عاطف
افندي احد مشرّاح الكتاب المشهور بختلاصة الحساب تاليف حضرة السيد بهاء
الدين العاملي فقال ان هذا الكلام يحتمل انه عن علي رضي الله تعالى عنه وانه
يمكن تاويله بان يقال لا يعلم احد جذر الاصم اهو موجود ام لا الا هو * وبهذا
التوجيه لا كفر ولا اعتراض * وقال حضرة الخبزا كبر مترجم اصل هذا
الكتاب من غير تاويل ليس في كلام علي كفر ولا اعتراض لان الكسور المتسلسلة
كلمات سبقت على التوالي تكون في منزلة التقريب من التحقيق وحيث ان لاطاقة
لبشر ان يصل الى نهاية الكسور ولو بذل غاية جهده والاشياء التي
لا منتهى لها من علمه تعالى وكل ما كان مخصوصا بعلمه تعالى ولا قدرة لبشر
ان يصل الى غايته فهو مقوض له تعالى وباب الاعتراض مسدود كما لا يخفى على
أولي الاباب

* (الدعوى الثالثة عشرة العملية) *

طريق استخراج سطح كثير الاضلاع المنتظم المرسوم داخل الدائرة وخارجها

عدد اضلاعهم ضعف عدد اضلاع الكثير الاضلاع المرسومين داخل الدائرة
وخارجها المتشابهين المعلومين

(شكل ١٦٩) مثلا اذا كان a ضلع كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة
وكان h الموازي له ضلع \llcorner كثير الاضلاع المرسوم خارجها المشابه له
وكانت نقطة c مركز تلك الدائرة ووصل وتر am وخطا al و rc
المماسين فوتر am يكون ضلع كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة
المضاعف الاضلاع عددا l الذي هو ضعف am هو ضلع كثير الاضلاع
المشابه له المرسوم على تلك الدائرة فاذا علمت ذلك يمكن اجراء العمل كما ذكر في زاوية
 a h م على سائر الزوايا الاخرى التي تساويها وفي هذا الاجراء يمكنني بما صرح به
في تلك الزاوية والنسبة بين ما اشغلت عليه هذه الزاوية من المثلثات كالتي بين
كثيري الاضلاع التي تكون تلك المثلثات اقسامها

فاذا سميت مساحة كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة الذي ضلعه a مساحة
 a ومساحة كثير الاضلاع المرسوم على الدائرة مشابها له مساحة h ومساحة
الذي ضلعه am المرسوم داخل الدائرة مساحة l ومساحة المشابه له المرسوم
على الدائرة ma فعلى منطوق الدعوى حيث ان a و h معلومان وجب
استخراج l و ma

اولا لاشتراك رأس مثلثي am و ah في نقطة a واتحاد الارتفاع تكون
النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما am و ah وايضا النسبة بين هذين
المثلثين كالنسبة بين كثيري الاضلاع l و a اللذين كان ذاك المثلثان قسميهما فلذا
صارت $a :: l :: a :: h$ وكذلك لاشتراك am و رأس مثلثي am و
 ah تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما am و ah وايضا
نسبة هذين المثلثين كالنسبة بين كثيري الاضلاع l و h فلذا كانت $l :: a :: h :: ma$
 $l :: a :: h :: ma$ لكن لتوازي خطي am و h تكون $h :: am :: l :: ma$
 $h :: am :: l :: ma$ ولتساوي النسب في هذا وفي التماسب الذي سلف تكون $l :: a :: h :: ma$
 $l :: a :: h :: ma$ وحيث ان a احد كثيري الاضلاع المطلوبين وانه وسط

ما صرح به في الدعوى السابقة صارت $1 = \sqrt{1} \times 1 = 1$ و $1.614674 = \sqrt{1.614674} \times 1.614674$
 و 3 و $1.820979 = \sqrt{1.820979} \times 1.820979$ وعلى هذا المنوال بصير اجراء
 العمل فبواسطة ذى الستة عشر ضلعاً يستخرج ذو الاثنين والثلاثين وهكذا
 البواقى حتى لا يبقى فرق بين الشكل المرسوم داخل الدائرة وخارجها اصلاً والمراد
 من هذا ان الشكل الكثير الاضلاع الداخلى والخارج تصير اضلاعه غير محسوسة
 ابدأ ويصير الشكلان المرقومان معدومين اصلاً اعنى اتحادهما بالدائرة فبعد
 اجراء العمل حسب الطاقة يعلم من هذا الكلام ان محيط الدائرة عبارة عن شكل
 كثير الاضلاع منتظم كعدد اضلاعه حتى صار كل ضلع منه غير محسوس ومن ثمة
 صارت مساحة الدائرة تؤخذ كمساحة كثير الاضلاع المنتظم اعنى حاصل ضرب
 نصف نصف القطر بالمحيط كما فعل بمساحة الشكل المنتظم وانما يجري العمل
 اقل ما يكون الى المحل الذى تنزل فيه الكسور مادامت الخانات توافق العمل
 فى مثالنا هذا فبمضى العمل على الترتيب الاعشارى الى سابع خانة يعنى يجرى
 العمل مادامت الخانات موافقة للعمل وما يؤخذ عند المنتهى التقريبي يكون
 مساحة الدائرة وبذلك حكم ان مساحة الدائرة صارت وسطاً متناسباً بين الداخلى
 والخارج والفرق بينهما غير محسوس ولم يقع بينهما مخالفة فى مواضع كثيرة من
 الاعشارى ومن ثمة ظهر عدم المخالفة بين اقسامهما لان العبارة بالخانات الواقعة
 فى صدر الاعشارى فصارت قد ديم الكسور الاعشارية الى سابع خانة والخانات
 المتوافقة هاهى

عدد الاضلاع	المرسوم داخل الدائرة	مسائح كثير الاضلاع	مسائح كثير الاضلاع
٤	٠٠	٢	٤
٨	٠٠	٢	٨
١٦	٠٠	٣	١٦
٣٢	٠٠	٣	٣٢

٣,١٤٤١١٨٤	—	٣,١٣٦٥٤٨٥	—	٠٠ ٦٤
٣,١٤٢٢٢٣٦	—	٣,١٤٠٣٣١١	—	٠٠ ١٢٨
٣,١٤١٧٥٠٤	—	٣,١٤١٢٧٧٢	—	٠٠ ٢٥٦
٣,١٤١٦٣٢١	—	٣,١٤١٥١٣٨	—	٠٠ ٥١٢
٣,١٤١٦٠٢٥	—	٣,١٤١٥٧٢٩	—	٠١ ٠٢٤
٣,١٤١٥٩٥١	—	٣,١٤١٥٨٧٧	—	٠٢ ٠٤٨
٣,١٤١٥٩٣٣	—	٣,١٤١٥٩١٤	—	٠٤ ٠٩٦
٣,١٤١٥٩٢٨	—	٣,١٤١٥٩٢٣	—	٠٨ ١٩٢
٣,١٤١٥٩٢٧	—	٣,١٤١٥٩٢٥	—	١٦ ٣٨٤
٣,١٤١٥٩٢٦	—	٣,١٤١٥٩٢٦	—	٣٢ ٧٦٨

فظهر من الحساب المرقوم ان مساحة الدائرة = ٣,١٤١٥٩٢٦ فحيث
صار تقديم الكسر الاعشارى الى سابع خانة وترك البواقي حسبت الكسور
بن زيادة تزييم خانة ليكون حاصل الحساب مقرونا بالصحة وواحد الى الحقيقة
عند منتهى الخانات الثلاث لا يكون للشبهة مجال في صحة الحساب
وحيث صارت مساحة الدائرة مساوية لحاصل ضرب نصف نصف قطرها
بالمحيط تبين انه اذا كان نصف قطرها واحدا فنصف المحيط =
٣,١٤١٥٩٢٦ وان كان قطرها واحدا فالمحيط = ٣,١٤١٥٩٢٦
فظهر ان مقدار ط الذي هو اقرب نسبة القطر الى المحيط كما سبق
= ٣,١٤١٥٩٢٦ وثبت المطلوب

(الدعوى الخامسة عشرة القائدة)

(شكل ١٧٠) اذا كان ضلع Δ هـ المساوى لضلع Δ ز في مثلث Δ هـ
المساوى الساقين المشترك في رأس Δ بمثلث Δ ا - وسطا متناسبا بين
ضلعى Δ ا و Δ ز فالمثلثان المرقومان يكونان متكافئين ومعا داهما
اذا كانت زاوية Δ ا - قائمة فعمود Δ و النازل على قاعدة المتساوى
الساقين يكون وسطا متناسبا بين ضلع Δ ا وبين نصف مجموع ضلعى Δ ا

و ٢ -

اولا حيث ان زاوية δ مشتركة تكون نسبة مثلث $\alpha - \delta$ الى مثلث $\delta - \delta$ متساوي السابقين كنسبة مستطيل $\alpha \delta \times \delta - \delta$ الى مستطيل $\delta \delta$

$\times \delta - \delta$ او كنسبة $\frac{\alpha}{\delta} \delta$ (٢٤ مقالة ٣) وفي هذه الاربعة المتناسبة

معي كان $\frac{\alpha}{\delta} \delta = \alpha \delta \times \delta - \delta$ اعني ان يكون $\delta \delta$ وسطا متناسبا بين ضاهي $\alpha \delta$ و $\delta - \delta$ تبين ان يكون مثلثا $\alpha - \delta$ و $\delta - \delta$ متكافئين لان تساوي حدى النسبة الثانية يستلزم تساوي حدى النسبة الاولى لمساوئ من خواص التناسب

ثانيا يلزم من تقسيم عمود δ و δ لزاوية $\alpha - \delta$ الى قسمين متساويين ان تكون $\alpha \delta : \delta - \delta :: \alpha : \delta - \delta$ (١٧ مقالة ٣) وايضا بطريق التركيب تكون $\alpha \delta : \delta - \delta :: \alpha : \delta - \delta$ او $\alpha : \delta - \delta :: \alpha \delta : \delta - \delta$ لكن حيث ان نسبة $\alpha \delta$ الى $\alpha - \delta$ كنسبة مثلث $\alpha \delta$ الى مثلث $\alpha - \delta$ او $\delta - \delta$ ولوجود النسبة المشتركة في هذين التناسبين صارت $\alpha \delta : \delta - \delta :: \alpha : \delta - \delta$ $\delta - \delta ::$ مثلث $\alpha \delta : \delta - \delta$ وان كانت زاوية α قائمة في تشابه مثلثي $\alpha \delta$ و $\delta - \delta$ تكون $\alpha \delta : \delta - \delta :: \alpha : \delta - \delta$ او $\alpha \delta : \delta - \delta :: \alpha : \delta - \delta$

$\delta - \delta :: \alpha : \delta - \delta$ ولوجود النسبة المشتركة في هذين التناسبين ايضا تكون $\alpha \delta : \delta - \delta :: \alpha : \delta - \delta$ او $\alpha : \delta - \delta :: \alpha \delta : \delta - \delta$ فاذا ضربت الثانية من هذا التناسب في مقدار α يتساوى مقدماها فبقية تساوي تاليها فلذا صار $\alpha \delta = \alpha (\delta - \delta)$ او $\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha (\delta - \delta)}{\delta}$ $\times (\frac{\alpha + \delta - \delta}{\delta})$

نظهر من هذه المساواة انه متى كانت زاوية α قائمة يكون عمود δ و وسطا متناسبا بين ضلع $\alpha \delta$ ونصف مجموع ضاهي $\alpha \delta$ و $\delta - \delta$ وبه ثبت المطلوب

* (الدعوى السادسة عشرة العملية) *

طريق استنباط دائرة من شكل كثير الاضلاع منتظم معلوم قدر ما يرايد بان يكون التفاوت بينهما قليلا

(شكل ١٧١) مثلا اذا كان $ر م$ $د ف$ مربع معلوما ينزل عمود $د ه$ من مركز $د$ على ضلع $م ت$ ويوصل $د ر$ * فالدائرة المرسومة بنصف قطر $د ا$ هي الدائرة المرسومة داخل المربع والمرسومة بنصف قطر $د ت$ هي المرسومة عليه

فالدائرة الاولى اصغر من المربع والثانية اكبر منه فيجب تضيق هذه الحدود فيؤخذ $د ه$ و $د ر$ متساويين بان يكون كل منهما وسطا متناسبا بين $د ا$ و $د ت$ فاذا وصل $د ه$ فنلت $د ه$ الحادث المتساوي الساقين يكافئ مثلث $د ا ر$ وهكذا اذا جرى العمل على المثلثات الثمانية المركب منها المربع يحدث ثمن منتظم يكافئ مربع $ت م د ف$ والدائرة المرسومة بنصف قطر $د و$ الوسط المتناسب بين مقسداي $د ا$ و $د ا + د ت$ هي الدائرة المرسومة داخل الثمن المرقوم والمرسومة بنصف قطر $د ه$ هي المرسومة على الثمن المذكور والدائرة الاولى اصغر من المربع والثانية اكبر منه فعلى المنوال المهر اذا تمحل مثلث $د و$ قائم الزاوية الى مثلث متساوي الساقين مكافئ له فحينئذ يحدث الشكل المنتظم ذو الستة عشر ضلعا مكافيا للمربع المقروض ولا تزال الدائرة المرسومة داخله اصغر من المربع المرقوم والمرسومة عليه اكبر

وكذا حتى نصير النسبة التي بين نصف قطر الدائرة الداخلة والخارجة جزءا غير محسوس وحيث يمكن اجراء العمل على التوالي كما ذكر حتى يوصل به الى درجة المساواة بين نصفي القطر من الداخلة والخارجة فيصير ما كان مرسوما داخل الدائرة وخارجها مكافيا للمربع المعلوم

* (تنبيه) * يذكر في هذا المحل ما ينتج وينحصر من البحث والتعمى على التوالي عن تقرب انصاف الاقطار

مثلا اذا كانت ١ نصف قطر الدائرة المرسومة داخل احد المنتظمين
 المستخرجين و - نصف قطر الدائرة المرسومة عليه وكانت آ و -
 نصفي قطري الدائرتين المرسومين داخل وخارج كثير الاضلاع المضاعف
 الذي يلي الاولين فعلى ما ثبت آنفا علم ان مقدار - يكون وسطا متناسبا بين
 آ و - ومقدار آ ايضا يكون وسطا متناسبا بين مقداري آ و $\frac{1}{2}$ ومن ثمة
 يكون $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ فعلى هذا
 متى علم مقدار آ و - نصفي قطري كثير الاضلاع بعلم آ و - نصف
 قطر كثير الاضلاع اللذان يليان الاولين بسهولة * فاذا اجرى العمل على
 الوجه المشروح حتى يصير الفرق بين نصفي القطر غير محسوس فيصير كل واحد
 منهما نصف قطر الدائرة المكافية للمربع أو كثير الاضلاع المقروض
 لكن اجراء هذه الطريقة بانخط اسهل * لانه عبارة عن استخراج الوسط المتناسب
 على التوالي بين خطين معينين ولا جرم اعماله بالاعداد أفيد

واستخراج نسبة القطر الى المحيط بطريق أصول الهندسة اسهل من ذلك كله
 مثلا اذا كان ضلع المربع = ٢ يكون ١ نصف القطر الاول المرسوم
 داخلا = ١ ويكون ٢ نصف القطر الاول المرسوم خارجا = ٢
 او ١٤٤٢١٣٦ و ١ فتقن كان ١ = ١ و - = ١٤٤٢١٣٦ و
 فيكون - = ١٨٩٢٠٧١ و آ = ٠٩٨٦٨٤١ و
 فعلى ما صرح به في أصول المتوالية تستعمل هذه الاعداد في استخراج ما سمي في
 من الاعداد الانية وههنا رقت نتائج الحساب الى سابع وثامن خاتمة من الارقام
 بواسطة جداول اللغاكمة العادية

انصاف اقطار الدوائر المرسومة خارجا	انصاف اقطار الدوائر المرسومة داخلا
١ ١٤٤٢١٣٦ و	١ ٠٠٠٠٠٠٠ و
١ ١٨٩٢٠٧١ و	١ ٠٩٨٦٨٤١ و
١ ١٢١٠٨٦٣ و	١ ١٤٣٠٥٠٠ و

١٢٦٥٦٣٩ و١ ————— ١٣٢٠١٤٩ و١

١٢٧٩٢٥٧ و١ ————— ١٢٩٢٨٦٢ و١

١٢٨٢٦٥٧ و١ ————— ١٢٨٦٠٦٣ و١

نظر لهذا الحال تساوت واتحدت انصاف الاقطار الاول من الطرفين خصوصا اذا أخذ الوسط المتناسب بالمتناسبة العددية مكان ما يؤخذ بالمتناسبة الهندسية فبهذه الطريقة تسهل عملية الحساب وان وجد فيها بعض فرق في اواخر الخانات فانه جزء غير محسوس وقد رقت ههنا نتائج تلك العملية

١٢٨٤٣٦٠ و١ ————— ١٢٨٣٥٠٨ و١

١٢٨٣٩٣٤ و١ ————— ١٢٨٣٧٢١ و١

١٢٨٣٨٢٧ و١ ————— ١٢٨٣٧٧٤ و١

١٢٨٣٨٠١ و١ ————— ١٢٨٣٧٨٧ و١

١٢٨٣٧٩٤ و١ ————— ١٢٨٣٧٩١ و١

١٢٨٣٧٩٢ و١ ————— ١٢٨٣٧٩٢ و١

فهذا العدد ١٢٨٣٧٩٢ و١ هو اقرب نسبة لنصف قطر الدائرة التي تساوى مساحة المربع الذي ضلعه اثنان وبذلك صار وجود نسبة القطر الى المحيط اسهل * وحيث تقدم ان مساحة الدائرة تساوى تربع نصف القطر مضروبا في عدد ط فاذا قسمت مساحة ط على مربع هذا العدد ١٢٨٣٧٩٢ و١ يخرج مقدار ط فاذا حسب ظهر هذا الرقم الخ ١٤١٥٩٢٦ و٣ وهو عين ما قد وجد بالوجه الاخر فها تقدم

ملحقات المقالة الرابعة

حد ١ بين المقادير لتحديد الجنس يقال لالاكبر اعظمها ويقال للاصغر اصغرهما فقطار الدائرة هو اعظم خط واصل بين نقطتي محيط الدائرة والعمود هو اصغر خط واصل بين نقطة مفروضة وخط معلوم

حد ٢ الاشكال المتساوية المحيط جمعا تسمى متساوية الاطراف

* (الدعوى الاولى النظرية) *

اعظم المثلثات المتحدة القاعدة المتساوية الاطراف ما كان ضلعاه سوى القاعدة
متساويين اعني ان ما ليس فوق القاعدة متساوي الساقين اعظم

(شكل ١٧٢) مثلا اذا كان $\angle \alpha = \angle \beta$ و $\alpha + \beta = \gamma$ فمثلث $\alpha \beta \gamma$ الذي قاعدته
عين قاعدته واطرافه مساوية لاطرافه فاذا جعلت نقطة δ مركزا ورسم محيط
ينصف قطر $\delta \alpha$ المساوي $\delta \beta$ فيلتقي هذا المحيط بخط $\delta \gamma$ الخارج في نقطة
 ϵ ويوصل $\delta \epsilon$ فزاوية $\delta \epsilon \alpha$ المرسومة في نصف الدائرة تصير قائمة
(٥ ا مقاله ٢) ويتددعمود $\delta \epsilon$ جهة δ ويؤخذ $\delta \epsilon = \delta \gamma$ ويوصل
 $\alpha \epsilon$ ثم ينزل عمودا $\beta \zeta$ و δ على $\epsilon \delta$ من نقطة ζ و γ ومن كون
 $\delta = \delta \epsilon$ و $\delta \epsilon = \delta \gamma$ يكون $\alpha \delta + \delta \gamma = \alpha \epsilon + \epsilon \gamma = \alpha \epsilon + \epsilon \gamma$ و $\alpha \delta + \delta \gamma = \alpha \epsilon + \epsilon \gamma$
 $\alpha \delta + \delta \gamma = \alpha \epsilon + \epsilon \gamma$ واذ فرض ان $\alpha \delta + \delta \gamma = \alpha \epsilon + \epsilon \gamma$ فاصلا
 $\alpha \delta$ كان $\alpha \delta = \alpha \epsilon + \epsilon \gamma$ فاصلا ماثل $\alpha \delta < \alpha \epsilon + \epsilon \gamma$ فهو
ابعد منه عن عمود $\delta \epsilon$ فلذا صار $\delta \epsilon < \delta \gamma$ او $\delta \epsilon$ نصف $\delta \gamma$
اكبر من $\delta \epsilon$ نصف $\delta \gamma$ (١٢ مقالة ١) ولكن نسبة مثلثي $\alpha \delta \epsilon$
و $\alpha \beta \gamma$ متحدى القاعدة $\alpha \delta$ كنسبة ارتفاعيهما $\delta \epsilon$ و $\delta \gamma$ وحيث
ان $\delta \epsilon < \delta \gamma$ فثبت المطلوب ان يكون مثلث $\alpha \delta \epsilon$ المتساوي الساقين
اعظم من مثلث $\alpha \beta \gamma$ ما ليس بتساوي الساقين مع اتحاد القاعدة وتساوي
الاطراف فيهما

(الدعوى الثانية النظرية)

اعظم الاشكال الكثيرة الاضلاع المتجعدة اضلاعها المتساوية الاطراف
ما كانت اضلاعه متساوية

(شكل ١٧٣) لانه اذا كان $\alpha \delta \epsilon$ وهو اعظمها ولم يكن ضلع $\delta \epsilon$
مساويا لضلع $\delta \gamma$ ينشأ مثلث $\delta \epsilon \gamma$ متساوي الساقين فوق قاعدة
 $\delta \epsilon$ على ان يكون متساوي الاطراف بمثلث $\delta \epsilon \gamma$ فمثلث $\delta \epsilon \gamma$
المرفوم يكون اكبر من مثلث $\delta \epsilon \gamma$ فلازم ان يكون كثير الاضلاع

أر ع هـ و أكبر من كثيرى الاضلاع أ ر ح هـ و حيث لم يكن أ ر ح هـ و
 اعظم كثيرى الاضلاع المرقومة وهذا بخلاف ما قد فرضناه فلذا ثبت المطلوب
 من أن يكون $ر = ح = د$ في الاعظم وبمثل هذا ثبت أن $د = هـ$
 و $هـ = د$ هو الخوان الاعظم هو ما تساوت اضلاعه
 * (الدعوى الثالثة النظرية) *

(شكل ١٧٤) كافة المثلثات المرسومة بضلعين معلومين يحدث بينهما زاوية حيثما
 اتفق اعظمها ما كان بين ضلعيه المعلومين زاوية قائمة
 مثلا إذا كان أ ح و أ د مثلثين وضلع أ مشترك فيهما وضلع أ ح
 مساويا لضلع أ د وزاوية أ ح قائمة أقول أن مثلث أ ح القائم الزاوية
 اعظم من مثلث أ د الذى كانت زاويته أ حادة أو منفرجة * الاشتراك
 قاعدة أ بين المثلثين المرقومين كانت النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعيهما
 أ ح و د ولكن حيث أن عمود د هـ أصغر من مائل د أ المساوى أ ح
 فعلى مقتضى التناسب صار مثلث أ د أصغر من مثلث أ ح وثبت
 المطلوب

* (الدعوى الرابعة النظرية) *

اعظم كثيرى الاضلاع المرسومة باضلاع معلومة سوى ضلع آخر صار قطرا
 لمخطط دائرية بجميع زواياه

(شكل ١٧٥) مثلا إذا كانت أضلاع أ ر و ر ح و ح د و د هـ و هـ أ
 معلومة وكان أ ر ح هـ و اعظم كثيرى الاضلاع المرسومة بهما وضلع أ د غير
 محدود ووصل أ د و أقول أن لم تكن زاوية أ د قائمة يضم إلى
 قسمة ر ح و د هـ مثلث أ د و بان تجعل زاوية أ د قائمة وهما باقيا
 على حالهما

وحيث أن هذا المثلث القائم الزاوية أكبر من المثلث المقدم فكانه ضم إلى كثير
 الاضلاع المقروضا أكبر شئ فقدر أوفيه خلف لما فرضناه فلذا علم أن كثير الاضلاع
 المرقوم لا يمكن أن يكون اعظم أصحابه ما لم تكن زاويته أ د قائمة واثبات

عظمه يستلزم قيام سائر زواياه $ا-و$ و $ا-د$ و $ا-ه$ ومن ثمة ثبت المطلوب
من ان يمر نصف المحيط المرسوم بنصف قطر $او$ الغير المحمود بجميع زواياه
 $ا-و$ و $و-د$ و $د-ه$ و $ه-و$ وان الاعظم ما يمر المحيط المرسوم بسائر
زواياه

تنبيه يدسؤال وهو انه يمكن رسم كثير الاضلاع بطرائق متعددة بواسطة تلك
الاضلاع المعلومة ويمر بزواياه نصف المحيط المنشا والضلوع الاخير المجهول مقداره
مثل (شكل ١٧٦) يعنى ان $ا-ب$ يوتر الاقواس المرسومة بنصفى قطرى $ا-د$
و $ا-ه$ المختلفين هذاولسكن لاتزال اصغر الزوايا المركزية المستندة الى الوتر
المرسوم واقعة فى الدائرة التى نصف قطرها كبر فلذا صارت $ا-د > ا-ه$
وحيث ان زاوية $ا-ه = ا-د + د-ه$ (مقالة ١) فتصير $ا-د > ا-ه$
واذا ضعف الطرفين ظهر ان $ا-د > ا-ه$
(الدعوى الخامسة النظرية)

لا يمكن رسم كثير الاضلاع $ا-د$ هـ هو المعلوم اضلاعه سوى ضلع مجهول صار
قطر النصف المحيط المار بزواياه الاعلى نسق واحد فقط
(شكل ١٧٥) لانه اذا فرض وجود دائرة اخرى يمكن رسمه فيها فان كانت اكبر منها
اقول حيث ان اوتار $ا-ب$ و $د-ه$ و $ا-د$ الخ لاتوافق الا اصغر الزوايا المركزية
فمجموعها يكون اقل من قائمتين واذا تعدت تلامس نهايات الاضلاع بنهايتى قطر
الدائرة * وان كانت اصغر وقع ذلك الخلاف وعدم الموافقة فظهر انه لا يمكن
رسمه الا فى تلك الدائرة على سياق واحد فقط

تنبيه يمكن تغيير وضع اضلاع $ا-ب$ و $د-ه$ و $ا-د$ الخ كبراد والقطر باقى على
حاله وكذا المساحة

لانه وان تغير ترتيب اقواس $ا-ب$ و $د-ه$ الخ بوجه ما حسبك ان يكون
مجموعها مساويا لنصف المحيط * وفى كل جال لاتزال مساحة كثير الاضلاع
بعينها حيث انها التقاضل بين مساحة الدائرة وبين مساح قطع $ا-ب$ و $د-ه$
الخ

(الدعوى السادسة النظرية)

(شكل ١٧٧) اعظم جميع كثيرى الاضلاع المرسومة بالاضلاع المعلومة هو ما كان قابل الرسم داخل الدائرة يعنى ما يمكن رسم المحيط المار بجميع زواياها مثلا اذا كان $ا-د-ه-و-ز$ كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة وكان $ا-د-ه-و-ز$ غير قابل الرسم فيها وله اضلاع تساوى اضلاعه أى اذا كان $ا-د = ا-ه = ا-و = ا-ز = د-ه = د-و = ه-ز$ الخ اقول ان كثير الاضلاع المرسوم فى الدائرة كبر على ما يرسم

لانه اذا رسم قطر $ه-م$ ووصل $ا-م$ و $م-ز$ وانشئ مثلث $ا-م-ز$ على ضلع $ا-ز$ المساوى لضلع $ا-د$ مساويا للمثلث $ا-د-م$ ووصل $ه-م$ فعلى ما صرح به فى الدعوى الرابعة كثير الاضلاع $ه-و-د-ا-م$ المرسوم فى نصف المحيط الذى قطره $م-ه$ اكبر من كثير الاضلاع $ه-و-د-ا-م$ الذى لا يرسم فيه والا لكان غير ممكن الرسم كدلت عليه الدعوى الخامسة وبمثل هذا اثبت أن كثير الاضلاع $ه-د-م$ اكبر من كثير الاضلاع $ه-د-ز-م$ فبصبر $ه-و-د-ا-م-ه$ كثير الاضلاع الكامل اكبر من $ه-و-د-ا-م-ه-د-ه$ قطعاً ولا يمكن ان يساويه *

وحيث امكن رسم احدهما فى الدائرة وامتنع رسم الاخر فاذا طرح من كل مثلثا $ا-م-ز$ و $ا-م-د$ المتساويان يسقى كثير الاضلاع $ا-د-ه-و-ز$ المرسوم فى الدائرة اعظم من كثير الاضلاع $ا-د-ه-و-ز$ الذى لم يمكن رسمه فيها

تنبيه مما صرح به فى الدعوى الخامسة ثبت انه لا يمكن ذلك الا فى دائرة واحدة فقط وكثير الاضلاع الاعظم لا يكون الا واحدا فقط وان المساحة السطحية منه تبقى بعينها وان تغير موضع اضلاعه

(الدعوى السابعة النظرية)

الكثيرة الاضلاع المتساوية الاطراف المتعددة الاضلاع عددا اعظمها ما كان

منتظما

لانه قد ثبت في الدعوى الثانية ان اعظم كثيرى الاضلاع ما تساوت اضلاعه واعظمها ما كان قابلا للرسم في الدائرة كما تقدم في الدعوى الماضية ومن اجل ذلك ثبت المطلوب من ان يكون المنتظم اعظمها

(الدعوى الثامنة الفائدة)

النسبة بين الزاويتين المركزيتين المسوحتين في الدائرتين المختلفتين كنسبة قوسيهما المحصورين بين محيطيهما منقسمين على نصفي قطريهما مثلا (شكل ١٧٨) تكون نسبة زاوية \angle الى زاوية \angle كنسبة $\frac{د ه}{د ط}$ الى $\frac{د ه}{د ط}$

فاذا رسم قوس \angle بين طرفي \angle و \angle ط ه بنصف قطر \angle و المخرج المساوي لنصف قطر \angle او لالتساوي انصاف اقطار \angle و \angle تكون \angle : \angle :: $\frac{د ه}{د ط}$: $\frac{د ه}{د ط}$ ولكن لمساوية قوسى \angle و \angle تكون \angle : \angle :: $\frac{د ه}{د ط}$: $\frac{د ه}{د ط}$ فلذا صارت نسبة $\frac{د ه}{د ط}$ مساوية لنسبة $\frac{د ه}{د ط}$ ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يكون \angle : \angle :: $\frac{د ه}{د ط}$: $\frac{د ه}{د ط}$ *(الدعوى التاسعة النظرية)*

كثيرا الاضلاع المنتظمة المتساوية الاطراف اكبرهما اكثر الاضلاع عددا (شكل ١٧٩) اذا كان \angle نصف ضلع احدهما و \angle مركزه و \angle ط ه بعدد مركزه و \angle ا - نصف ضلع الآخر و \angle مركزه و \angle ب - بعدد مركزه * فاذا فرض ان مركزى \angle و \angle موضوعان على \angle اى بعدوان بعدى \angle و \angle موجودان باستقامة \angle وحيث ان زاويتى \angle ط ه و \angle ا - نصفان زاويتى كثيرى الاضلاع المركزيتين الغير المتساويتين فخطا \angle ا و \angle ب يلتقيان في نقطة و اذا امتد على الاستقامة وينزل من هذه النقطة عمود و \angle على \angle ويرسم قوسا \angle و \angle منتهيين الى ضلعي \angle و \angle ط و بان تكون نقطتا \angle و \angle مركزين

فاذا كن الامر كما ذكر تكون \angle : \angle :: $\frac{د ه}{د ط}$: $\frac{د ه}{د ط}$ كما صرح به

في القائمة المتقدمة ولكن نسبة ده نصف الضلع الى اطراف كثير الاضلاع كنسبة زاوية ط الى اربع قوائم وايضا حيث ان نسبة ا- نصف الضلع الى اطراف كثير الاضلاع الثاني كنسبة زاوية ح الى اربع قوائم وتساوي اطراف كثير الاضلاع كانت ده : ا- :: ط : ح أو ده : ا- :: $\frac{ر}{ط} : \frac{ر}{ح}$ فاذا ضربت مقدمات هذا التناسب في مقدار ط و قواله في ح تكون ده \times ط : ا- \times ح :: ر : ر : ده : ر ولكن لتشابه مثلثي ط ده و ط و ر كانت ط ه : ط ب :: ده : و وبه يكون ده \times ط = ط ه \times و وايضا التشابه مثلثي ا- ح و و ر يكون ا- \times ح = ح- \times و ر فلذا صارت ط ه \times و ر : ح- \times و ر :: ر : ر أو ط ه : ح- :: ر : ر ومن هذا علم انه متى كان قوس ر اكبر من قوس ح يلزم ان يكون بعده مركه ط ه اكبر من ح- بعد المركز الا تخوفا اذا عمل في الطرف الا تخومن خط ح و شكل ح ك ه مساويا تاما للشكل ح د ه بان يكون ح ك = ح د وزاوية ح د ك = ح د و وقوس ك ه = ح د و حيث ان منحنى ك ه د اكبر من قوس ك ح د لاحاطته به و حيث ان د ه نصف المنحنى اكبر من د ح نصف القوس كان ذلك ابهر دلائل على ان قوس ر اكبر من قوس ح فعلى هذا ظهر ان ط ه بعد المركز اكبر من ح- البعد الا تخو ولا يجوز ان النسبة بين كثير الاضلاع المتساوي اطراف كل النسبة بين بعدهما من المركز فلذا كان كثير الاضلاع الذي نصف ضلعه ده اكبر مما كان نصف ضلعه ا- وحيث ان الزاوية المركز يه من كثير الاضلاع الاول أصغر قدرا كانت اضلاعه أكثر عددا * ومن أجل ذلك ثبت المطلوب من ان يكون أعظم كثير الاضلاع المنتظمين ما كان أكثر الاضلاع عددا

(الدعوى العاشرة النظرية) *

الدائرة اعظم كافة كثير الاضلاع المتساوية الاطراف (شكل ١٨٠) كثيرة الاضلاع المتساوية الاطراف المتحدة العدد ضلعا أعظمها

ما كان منتظما وقد سبق اثباته * فالآن لاجابة الالتهديد كثير الاضلاع
المتساوي الاطراف المنتظم بالدائرة فقط

اذا كان a نصف ضلع كثير الاضلاع المرقوم و c مركزه فاقول متى
كانت زاوية c طه في الدائرة المتساوية الاطراف $= a$ نظر هذا
الحال بصير قوس c مساويا لنصف ضلع a ومن كون نسبة كثير
الاضلاع c الى دائرة c كنسبة مثلث a الى قطاع c طه من
أجل هذا كانت $c : d :: \frac{1}{p} a : c \times d : \frac{1}{p} طه \times طه$
 $:: c : طه$ فاذا رسم خط $هـ$ المماس من نقطة $هـ$ بان يلاقي
 $ط$ و الخروج في نقطة $ر$ فينتاق من تشابه مثلثي a و $رطه$ هذا
التناسب $c : طه :: a : أو د : د$ فلذا صارت $c :$
 $d :: د : د$ أو كنسبة $هـ$ $\times \frac{1}{p} طه$ أعنى مساحة قطاع
 c الى $د$ $\times \frac{1}{p} طه$ وهو مساحة مثلث $رطه$ وحيث ان القطاع
أصغر من المثلث يكون c يعني كثير الاضلاع أصغر من d يعني الدائرة من
أجل ذلك ثبت المطلوب من ان تكون الدائرة أعظم كثيرى الاضلاع المنتظمة
المتساوية الاطراف

* (تمت المقالة الرابعة) *

المقالة الخامسة

في بيان السطوح المستوية والزوايا المجسمة

المحدود

(حدا) متى كان خط مستقيم عمودا على جميع الخطوط المستقيمة التي تمر بموقعه في سطح مستو فيصير عمودا على ذلك المستوى والمستوى يكون عليه عمودا (٤) والموقع هو نقطة التقاء المستوى بالعمود

٢ اذا امتد الخط المستقيم والسطح المستوي ولا يلتقيان فالخط يكون موازيا للسطح والسطح أيضا يكون موازيا له

٣ المستويان المتوازيان لا يلتقيان أبدا اذا امتد ابلا نهاية

٤ سيأتي في الدعوى الثالثة ان الفصل المشترك للسطحين الملتقيين خط مستقيم والزاوية أو الانحراف الذي بينهما هو مقدار ما بين السطحين من انقراج قل أو كثر وتعين مساحته بالزاوية الواقعة بين العمودين الخارجين من نقطة واحدة من الفصل المشترك في كل من السطحين وسيأتي ذكره تفصيلا في الدعوى السابعة وتلك الزاوية اما ان تكون حادة أو قائمة أو منفرجة

٥ فان كانت قائمة يصير كل واحد من المستويين عمودا على الآخر

٦ الزاوية المجسمة هي المساحة المنزوية الحاصلة من اشتغال جلة سطوح مستوية قد اجتمعت في نقطة واحدة فلذا (شكل ١٩٩) زاوية سم المجسمة حصلت من

اجتماع مستويات اسم - و - سمح و - سمس و - سمس

اقل ما يلزم لتشكيل زاوية مجسمة ثلاثة مستويات

(الدعوى الاولى النظرية)*

لا يمكن ان يكون بعض المستقيم في المستوى وبعضه خارجا عنه

لان وجود نقطتين مشتركين من هذا الخط في المستوى يستلزم كون جميع

المستقيم الذي وجد بعضه على المستوى لاشتراكه في نقطتين ووجوده بتمام
اجزائه على ذلك المستوى ظاهر كما مر في تعريف المستوى
تبيينه لاجل إدراك استواء السطح لا بد من تطبيق خط مستقيم على ذلك السطح
من جهات مختلفة وان يرى تماسه بجميع اجزاء امتداد بذلك السطح
(الدعوى الثانية النظرية)

الخطان المستقيمان المتقاطعان يعينان وضع مستوي وهما موجودان عليه
(شكل ١٨١) مثلا اذا تقاطعا خطا a و b المستقيمان في نقطة a اولاً يتصور
المستوى الذي فيه يوجد a ثم يدور حوله حتى يمر بنقطة b وحيث وجد
نقطتا a و b من خط a في ذلك المستوى وجب وجوده كاملاً فيه وتبين
ان وضع ذلك المستوى يتعين بجهة احاطة خطي a و b وثبت المطلوب
(نتيجة ١) مثلث a و b او ثلاث نقط ليست على مستقيم واحدة تعين وضع مستوي
(نتيجة ٢) (شكل ١٨٢) ايضاً خطا a و b المتوازيان يعينان وضع مستوي
* لانه اذا رسم خط h هو القاطع فالمستوى الذي حوى خطي a و h هو
مستوى خطي a و b

(الدعوى الثالثة النظرية)

اذا تقاطع المستويان فيكون الفصل المشترك خطاً مستقيماً * لانه اذا وجد من
النقط المشتركة بين المستويين ثلاث نقط ليست على خط مستقيم فلا بد من
مرور كل من المستويين من تلك النقط ولا يمر من ثلاث نقط الا مستوي واحد فقط
كما هو صريح الدعوى التي تقام فن هذا يلزم ان يكون المستويان مستويين
واحداً وهذا بخلاف ما نطق به الدعوى ومن اجل ذلك ثبت المطلوب من ان
يكون الفصل المشترك خطاً مستقيماً

(الدعوى الرابعة النظرية)

(شكل ١٨٣) اذا كان خط a المستقيم عوداً على محل تقاطع خطي b و
 c المتقاطعين في مستوى m يصير عوداً على كل خط مستقيم يمر بوقعه
فهو d وايضاً على مستوى m

يرسم خط $ر د$ المستقيم المار بنقطة $ك$ التي تعينت كيفية ما اتفق على خط
 $د ك$ في زاوية $ر د د$ بأن يكون $ر ك = د ك$ (مقالة ٣ على ٥)
 وتوصل خطوط $ا ر$ و $ا ك$ و $ا د$ فاقول حيث انقسمت $ر د$ قاعدة
 مثلث $ر د د$ بمساويين في نقطة $ك$ يصير $\frac{ر}{د ر} + \frac{ر}{د د} = \frac{ر}{د ك}$
 $\frac{ر}{د ك} + \frac{ر}{د د} = \frac{ر}{د ا} + \frac{ر}{د ا} = \frac{ر}{ا د} + \frac{ر}{ا د}$ وكذلك في مثلث $ا د د$
 فاذا طرحنا المتساوية الاولى من هذه يصير $\frac{ر}{د د} - \frac{ر}{ا د} + \frac{ر}{د د} - \frac{ر}{ا د} = \frac{ر}{د ك} - \frac{ر}{ا ك} =$

ولكن لقيام كل من مثلثي $ا د د$ و $ا د ر$ في نقطة $د$ يكون $\frac{ر}{د د} - \frac{ر}{ا د} =$
 $\frac{ر}{ا د} - \frac{ر}{د د}$ وكذا $\frac{ر}{ا د} - \frac{ر}{د د} = \frac{ر}{د ر} - \frac{ر}{ا د}$ فاذا وضع $ا د$ في مقامه
 في المساواة الاولى يصير $\frac{ر}{ا د} + \frac{ر}{ا د} = \frac{ر}{ا ك} - \frac{ر}{د ك}$ وحيث
 لم نزل المساواة باقية على حالها اذا تنصف الطرفين صار $\frac{ر}{ا ك} - \frac{ر}{د ك} =$
 $\frac{ر}{ا ك} = \frac{ر}{د ك} + \frac{ر}{ا د}$ فلذا ثبت قيام مثلث $ا د ك$ في نقطة $د$ (مقالة ٣)
 وظهر كون خط $ا د$ عمودا على خط $د ك$

تنبيه لم يخص هذه الدعوى بثبوت امكان ان يكون الخط المستقيم عمودا على
 جميع الخطوط التي تمر بوقعه في المستوى انما المراد منها كلما كان الخط المستقيم
 عمودا على الخطين المتقاطعين في المستوى يصير به تحقيق كاف وبيان شاف
 لاثبات ما قد ورد في الحد الاول من هذه المقالة

(نتيجة ١) حيث ان عمود $ا د$ أقصر من $ا ك$ أي ما قبل فهو البعد الحقيقي
 بين نقطة $ا$ ومستوى $د ك$

(نتيجة ٢) لا يمكن اقامة عمود من نقطة $د$ المفروضة على مستوي العمود واحد
 فقط

لانه لو أمكن اخراج عمودين من عين نقطة $د$ فاقول اذا مر بمستوى هذين العمودين وكان الفصل المشترك بينهما وبين مستوى $م$ مثلا $دك$ فبكل واحد من هذين العمودين يصير عمودا على خط $دك$. واذا لم يكن اخراج عمودين من نقطة واحدة على مستقيم في مستو واحد وهذا مستحيل فلذا تبين انه لا يمكن اخراج عمودين على مستو واحد من نقطة واحدة واقعة على ذلك المستوى * وأيضا لا يمكن تنزيل عمودين على مستوى من نقطة خارجة عنه لانه لو كان $ا د$ و $ا ك$ عمودين يلزم قيام زاويتي $ا د ك$ و $ا ك د$ من مثلث $ا د ك$ وقد استحال

(الدعوى الخامسة النظرية)

الموائل التي اقترفت عن العمود بابعاد متساوية تكون متساوية والتي افترقت بابعاد مختلفة أبعادا من العمود أطول

(شكل ١٨٤) لانه متى كانت زوايا $ا د -$ و $ا د ح$ و $ا د و$ قائمة وفرضت ابعاد $د ح$ و $د و$ متساوية فالمثلثات $ا د -$ و $ا د ح$ و $ا د و$ تكون متساوية اتساوي مثنى الاضلاع واحاد الزوايا التي بينهما فلذا اصارت أوتارها اقواسا متساوية وهي موائل $ا -$ و $ا ح$ و $ا و$ * وأيضا اذا فرض ان بعد $د ه$ أطول من بعد $د و$ أو مساوية $د -$ ثبت المطلوب من ان يكون مائل $ا ه$ أكبر من مائل $ا -$ أو $ا و$

نتيجة جميع المخطوط المائلة المتساوية نحو $ا -$ و $ا ح$ و $ا و$ الخ تكون منتهية الى محيط $د ح$ و المرسوم بمركز $د$ موقع العمود ومتصلة به فلذا اذا كانت نقطة $ا$ الخارجة عن المستوى معلومة معينة واريد وجود نقطة $د$ موقع العمود الذي يراد تنزيله منها على المستوى المرقوم أقول أول اثنين نقط $ا -$ و $ا ح$ و الثلاث على المستوى بان تكون ابعادها متساوية من نقطة $ا$ المعينة ثم اذا استخرج مركز الدائرة التي تمر بهذه النقط فهو $د$ موقع العمود المطلوب

تبينه زاوية $ا د$ هي ميل أو انحراف مائل $ا -$ على مستوى $م$

وانحراف موائل $ا$ - و $اح$ و $اد$ الخ حيث تساوت مثلثات $ا$ - $د$ و $اد$ و $اود$

(الدعوى السادسة النظرية)

(شكل ١٨٥) اذا كان خط $اد$ عمودا على مستوى $م$ وخط $دح$ موضوعا عليه وانزل عمود $دو$ على $دح$ من نقطة $و$ موقع العمود ووصل $اد$ فهذا الخط الموصول يصير عمودا على خط $دح$ فاذا اخذ $د$ - $د$ = $د$ ووصل $د$ - $د$ و $د$ و $ا$ - $ا$ و $ا$ فاقول حيث ان $د$ - $د$ = $د$ يكون مائلا و $د$ متساويين وأيضاً من كون $د$ - $د$ = $د$ يكون مائلا $ا$ - $ا$ و $ا$ متساويين نظرا الى عمود $اد$ ولوجود نقطتي $ا$ و $د$ من خط $اد$ على ابعاده متساوية من نهايتي $د$ و $ا$ يكون خط $اد$ عمودا على وسط خط $دح$

نتيجة لثنتين من هذا ان خط $دح$ صار عمودا على مستوى $اود$ * لانه عمود على كلا خطي $اد$ و $دو$ تنبيه خط $اه$ و $د$ المستقيمان لا يلتقيان اصلا * لانهما كالتوازيين وان ليسوا على مستوى واحد والبعدهما الاقرب بينهما هو خط $دو$ العمود على كل منهما - لانه اذا وصل بين نقطتي $د$ و $ا$ فخط $دو$ يكون $ا$ - $د$ و $ا$ - $د$ فلذا $ا$ - $د$ < $د$

واما رسم زاوية قائمة بين خطي $اه$ و $د$ فممكن هذا وان لم يكونا على مستوى واحد لانه تحدث زاوية قائمة بين خط $اه$ وبين الخط المرسوم من $ا$ حتى نقطة مواز بالخط $د$ وكذا يمكن ان ترسم زاوية قائمة بين كل خطين ليسا على مستوى واحد نحو $ا$ - $د$ و $دو$ مثل التي رسمت بين خط $ا$ - $د$ وبين الخط المرسوم من نقطة منه مواز بالخط $دو$

(الدعوى السابعة النظرية)

(شكل ١٨٦) اذا كان خط $اد$ عمودا على مستوى $م$ فكل خط يوازيه نحو هو يكون عمودا على المستوى المرقوم

فاقول اذا مر بمستوى من خطى Δ و Γ هو المتوازيين لخط Δ و Γ بصير فصل مشترك بينهما وبين مستوى Δ فاذا اخرج عمود Δ على خط Δ وفيه يكون عمودا على مستوى Δ و Γ كما هو صريح نتيجة الدعوى التي تقدمت فزاوية Δ تكون قائمة وكذا زاوية Γ * لان خط Δ عمود على خط Δ وخط Γ هو مواز له وحيث صار خط Δ هو عمودا على خطى Δ و Γ ثبت المطلوب من ان يكون عمودا على مستوى Δ

(نتيجة ١) وبالعكس اذا كان خطا Δ و Γ وعمودين على مستوى Δ بصيران متوازيين * لانه ان لم يكونا متوازيين واقيم من نقطة Δ خط مواز لخط Δ فهذا الخط بصير عمودا على مستوى Δ واذا لم يكن اخراج عمودين من نقطة واحدة على مستوى واحد وهو محال كصريح الدعوى الرابعة

(نتيجة ٢) اذا كان خطا Δ و Γ المستقيمان موازيين لخط Δ المستقيم الثالث يكونان متوازيين * لانه اذا تنصرت Δ ومستوى Δ على خط Δ فيصير موازيا Δ و Γ عمودين عليه وعلى ما صرح به في الدعوى التي تقدمت يكونان متوازيين

وبفهم من هذه النتيجة ان تلك الخطوط ليست على مستوى واحد لان ذلك تقدم ذكره في المقالة الاولى

* (الدعوى الثامنة النظرية) *

(شكل ١٨٧) اذا كان خط Δ موازيا لخط Δ المرسوم في مستوى Δ يكون موازيا ايضا للمستوى المرسوم

لانه اذا كان Δ في مستوى Δ والملاقى مستوى Δ فاقول حيث لا يمكن وجود بعض نقط من Δ الفصل المشترك في غير مستوى Δ وان خط Δ مواز لخط Δ فلا يلاقيه اصله الا من ذلك لا يلاقى ذلك المستوى و يوازيه (٢)

* (الدعوى التاسعة النظرية) *

(شكل ١٨٨) اذا كان مستويا Δ و Γ عمودين على خط Δ بصيران

متوازيين

لانه اذا فرض بينهما التلاقي وكانت نقطة و مشتركة فيهما فاقول اذا وصل
خطا $او و$ و يكون خط $ا ب$ عمودا على كل منهما حيث كان عمودا على كل
من مستويي $م د$ و $س ع$ وعلى كل خط يمر بوقعية فيهما واذا الامكن انزال
عمودين من نقطة واحدة على مستقيمين واحد هو محال ومن اجل ذلك استحالة
التقاء مستويي $م د$ و $س ع$ وثبت التوازي
(الدعوى العاشرة النظرية)

(شكل ١٨٩) هو $و د ح$ الفصلان المشترك كان الحادان من تلاقى مستويي
 $م د$ و $س ع$ المتوازيين بمستوى $و د$ الثالث متوازيان * اقول حيث ان خطي
 $و د$ و $ح$ على مستوي واحد فان لم يتوازيا وان امتدا التقيما يلزم التقاء مستويي
 $م د$ و $س ع$ واذا لا اتقى عنهما التوازي وهذا بخلاف ما فرضناه ومن اجل
ذلك وجب توازي $و د$ و $ح$ الفصلين المشتركين واستحالة الالتقاء وثبت
المطلوب

(الدعوى الحادية عشرة النظرية)

(شكل ١٨٨) اذا كان خط $ا ب$ عمودا على مستوي $م د$ ايضا يكون عمودا
على مستوي $س ع$ الموازي له
أقول يرسم خط $ح$ كيفما اتفق في مستوي $س ع$ ويمر بمستوي $ا ب$
من خطي $ا ب$ و $ح$ فالفصل المشترك بينهما وبين مستوي $م د$ وهو خط
 $ا ب$ يوازي خط $ح$ وحيث ان خط $ا ب$ عمودا على مستوي $م د$ يكون
عمودا على خط $ا ب$ الذي فيه فيصير عمودا على خط $ح$ الذي يوازيه ومتى
كان $ا ب$ عمودا على كل خط يمر بوقعية نحو $ح$ يصير عمودا على مستوي
 $س ع$ وثبت المطلوب

(الدعوى الثانية عشرة النظرية)

(شكل ١٨٩) هو $و د ح$ المتوازيان الواقعان بين مستويي $م د$ و
 $س ع$ المتوازيين متساويان

فأقول إذا مر بمستوى هـ د ح و من متوازي هـ د و ع فيبقى المستويين المتوازيين في هـ د و ع وهما متوازيان وحيث فرض توازي هـ د و ع صار شكل هـ د ح و متوازي الاضلاع ومن ثمة ثبت ان يكون هـ د = و ع نتيجة لقد ظهر من هذه الدعوى ان المستويات المتوازية لا تزال على ابعاد متساوية في كل جهة * لان خطي هـ د و ع عكسا عودين على مستوي م د و س ع يتوازيان وينساويان

(الدعوى الثالثة عشرة النظرية) *

(شكل ١٩٠) اذا كانت زاويتا ح ا هـ و د و مختلفتين المستوي متوازيين الاطراف متحدة الجهة وضعا تكونان متساويتين * ومستوياهما يصيران متوازيين فاذا اخذ ا ح = د و ا هـ = د و وصل هـ د و د و ا و د و هـ و هـ د

فأقول حيث ان ا ح مساو ومواز لخط د ي يكون شكل ا د ح متوازي الاضلاع (مقالة ١) نقط د ي يوازي ويساوي خط ا ر وبمثل هذا ثبت ان خط هـ د يوازي ويساوي خط ا ر وكذلك من توازي ونساوي خطي د ي و هـ د يكون شكل ح هـ د ايضا متوازي الاضلاع فلذا صار ضلع هـ د موازيا مساويا لضلع د و فعلى هذا يتساوى مثلثا ح ا هـ و د و زاوية ح ا هـ تساوي زاوية د و

الصورة الثانية مستوى ا ح هـ يوازي مستوى د و * لانه اذا فرض ان المستوى الموازي لمستوى د و المار بنقطة ا يلتقي بخطي د و هـ في غير نقطتي د و هـ مثلا في نقطتي د و ع فمتساوي خطوط ا ر و د ي و ع الثلاثة كما مر في الدعوى الثانية عشرة وقد ثبت انهما تساوي خطوط ا ر و د و هـ الثلاثة واذن لازم ان يكون د ي = د و هـ و د = و ع وهذا مستحيل ومن اجل ذلك وجب التوازي بين مستويي ا ح هـ و د و و ثبت المطلوب

نتيجة زاويتا ح ا هـ و د و الحادثة ان من الفصول المشتركة بالتقاسم مستويي

أو غير موضوع إذا قطع ضلعيه المتقابلين خطا هـ و دح المستقيمان على
التناسب أعني إذا كان أه : هـ :: دؤ : دح و دس : دح ::
أح : ح د فالخطان القاطعان هـ و دح يقطعان في نقطة م على
أن تكون م ح : م د :: أه : هـ و هم : مو :: أح :
ح د

فإذا مر مستوى أـ ح د على أ بشرط أن لا يمر من دح ورسمت خطوط
هـ هـ و سـ و حـ و دـ موازية لخط دح من نقط هـ و سـ و حـ و دـ
فهذه الخطوط تلتقي بذلك المستوى في نقط هـ و سـ و حـ و دـ وتوازي
خطوط سـ و دـ و حـ (١٥ مقالة ٣) فتكون سـ ح : ح د :: سـ د
: د ح :: أـ ح : ح د فالذا تشابه مثلثا أـ ح د و سـ ح د (٢٠ مقالة ٣)
وبعد تصير أه : هـ :: أه : هـ و دؤ : دح :: دؤ : دح
وأيضا أه : هـ :: دؤ : دح أو بطريق البديل أه : دؤ ::
أـ : دـ لكن التشابه ملئي أـ حـ و دـ حـ فتكون أـ : دـ ::
أـ ح : ح د وبه تكون أه : دؤ :: أـ ح : ح د

ولتشابه مثلثي أـ حـ و دـ حـ فتكون زاوية هـ أـ ح تساوي زاوية ح دؤ
فلذا يشابه مثلثا أـ حـ هـ و دـ حـ و (٢٠ مقالة ٣) فلذا زاوية أـ حـ هـ = ح د
فبدا أن يكون هـ ح و خطا مستقيما واحدا وأيضا هـ و دـ و الخطوط
الثلاثة المتوازية تكون واقعة في المستوى الذي فيه خطا هـ و دـ المستقيمان
القاطعان في نقطة م ثم يظهر وهذا التناسب هم : مو :: هـ ح :
ح د :: أـ ح : ح د وذلك لتوازي هـ و دـ و م ح و دؤ
فإذا جرى العمل المرقوم على خط أـ س ثبتت تناسب ح م : م د :: أه :
هـ

(الدعوى السابعة عشرة النظرية)

(شكل ١٩٣) يمكن أن تعين مساحة الزاوية الواقعة بين مستويي م أـ و م أـ سـ

بزواية \angle اسه الحامدة بين عمودي \angle و اسه المخرجين في كل من
المستويين على الفصل المشترك \angle م كما ذكر في الحد الرابع
ولاجل اثبات ذلك كما ينبغي وبيان كيفية الطريق التي يستقر عليها ويوم اجراؤه
فيه ومن أي نقطة من الفصل يخرج العمودان لابد من البحث عن ذلك فاذا
اخذت \angle نقطة اخرى على \angle م الفصل المشترك واقيم عمود \angle في مستوى
 \angle م وعمود \angle م في مستوى \angle م وحيث ان كل واحد من خطي \angle م -
و اسه عمود على مستقيم \angle م يكونان متوازيين وايضا خط \angle م يوازي خط
 \angle م فلذا صارت زاوية \angle م = \angle م قتبين ان الزاوية الحامدة باخراج
العمودين سواء كانت من نقطة \angle م او من نقطة \angle م او من أي نقطة كانت على
الفصل المشترك لم تزل بينهما

ثانيا اذا زادت أو نقصت الزاوية التي بين المستويين ببعض النسب هلا تزيد زاوية
 \angle م كذلك بلى ولكن يلزم البحث ايضا عن ذلك فاذا جعلت نقطة \angle م مركزا
ورسمت دائرة \angle م اتفق قوس \angle م في مستوى \angle م و \angle م ورسمت ايضا قوس
 \angle م من مركز \angle م بالبعد المذكور ووصل \angle م كيفما اتفق \angle م اقول حيث
ان مستويي \angle م و \angle م عمودان على مستقيم \angle م يكونان متوازيين
فاذا صار \angle م \angle م الفصلان المشترك بين المستويين المرقومين وبين
مستوي \angle م متوازيين وزاوية \angle م تساوي زاوية \angle م تسهلا
للادراك اذا سميت الزاوية التي بين مستويي \angle م و \angle م \angle م وتساو علمت
كما ذكرنا زاوية \angle م زاوية \angle م لاجرم ان ركن \angle م \angle م
يساوي ركن \angle م وذلك بانه اذا وضعت قاعدة \angle م على مساويتها
 \angle م وضعتا صيحاتهما فيطبق الركن ويتحدان لاتحاد ارتفاع \angle م فيهما
فمبين ان كمية اشتمال زاوية \angle م على زاوية \angle م قدر كمية اشتمال ركني
 \angle م على ركن \angle م وان النسبة بين زوايا \angle م و \angle م
كما بين ركني \angle م و \angle م وما ذكر من التفاصيل يل في الدعوى
السابعة عشر فمن المقالة الثانية يشابه ما وردها من اجل ذلك صارت تؤخذ

زاوية \angle اسه لتعين مساحة \angle س ه م \angle اعنى الزاوية التى بين
مستويي \angle م اسه و \angle م ا د كمالا ينفى
تعيينه لقد علم ان الزاوية المرسومة بين المستويين كالزاوية المرسومة بين الخطين
المستقيمين

فلذا اذا اتا فذ المستويان فالزاويتان المتقابلتان يتساويان وبمجموع المتجاورتين
يساوى قائمة. ين و اذا كان أحد المستويين عمودا على الآخر يكون الآخر
عمودا عليه فـ \angle لم ان ما بين المستويين المتوازيين المقطوعين بهـ \angle س و ثالث من
الخواص وتساوى الزوايا \angle ين ما بين المستقيمين المتوازيين المقطوعين بهـ \angle س فقيم
ثالث ولا مراء

(الدعوى الثامنة عشرة النظرية)

(شكل ١٩٤) اذا كان خط اسه عمودا على مستوى م \angle فكل مستوى
اسه يمر به يكون ايضا عمودا عليه
اقول اذا كان خط حـ \angle فصلا مشتركا بين مستويي اـ و م \angle واقيم
عمود ده على خط سـ \angle فى مستوى م \angle فنكون اسه عمودا عليه
يضرب عمودا على \angle كل من خطى حـ و ده وحيث ان زاوية اسه د
الحادثة من عمودى س ه ا و س د الواقعة على سـ \angle الفصل المشترك هـ
معبارة لقد اراد ما بين مستويي اـ و م \angle وقائمة لزم ان يكون المستويان
متعامدين (حـ د هـ)

تنبية اذا تعامدت الخطوط الثلاثة اسـ و سـ و دـ \angle كان كل واحد منها
عمودا على مستوى الاخرين وتعامد السطوح المستوية الثلاثة التى احتوت
على تلك الخطوط

(الدعوى التاسعة عشرة النظرية)

(شكل ١٩٤) اذا كان مستوى اـ عمودا على مستوى م \angle واخرج عمود
سـ ا فى مستوى اـ على سـ \angle الفصل المشترك فـ عمود س ه ا يكون
عمودا على مستوى م \angle

لأنه إذا أخرج عمود $س$ في مستوى $م$ على خط $س$ فزاوية $اس$ نصير قائمة * لأن المستويين متعامدان ومن كون $اس$ عمودا على خطي $س$ و $س$ في مستوى $م$ يكون عمودا على المستوى المرقوم .

نتيجة إذا كان مستوى $ا$ عمودا على مستوى $م$ وأخرج عمود من $س$ نقطة الفصل المشترك على مستوى $م$ فهذا العمود يوجد في مستوى $ا$ فإن قيل لم يكن فيه أقول حيث يمكن إخراج عمود $اس$ على الفصل المشترك $س$ في مستوى $ا$ فهذا العمود يصير كذلك عمودا على مستوى $م$ وأذن أمكن إخراج عمودين من نقطة واحدة على مستوى واحد وهو محال

* (الدعوى العشر من النظرية) *

(شكل ١٩٤) إذا كان مستويا $ا$ و $ب$ عمودين على مستوى $م$ الثالث ففصلهما المشترك $اس$ يصير عمودا على المستوى المرقوم * لأنه إذا أخرج عمود من نقطة $س$ على مستوى $م$ فلا بد لهذا العمود أن يوجد في كلا المستويين $ا$ و $ب$ معا * وما هو إلا $اس$ ومن ثمة ثبت المطلوب أن يكون عمودا

* (الدعوى الحادية والعشرون النظرية) *

(شكل ١٩٥) إذا تشكلت الزاوية المجهدة من ثلاث زوايا مسطحة فمجموع كل اثنين منها أكبر من الثالثة

شرط في هذا الباب أن تكون كل واحدة من مجموع الاثنين أصغر من الثالثة لأنهما إذا كانتا كبيرتي الحاجة - ينتدلا لثبات انهما يفرض في زاوية $س$ المجهدة التي تشكلت بثلاث زوايا $اس$ و $اس$ و $اس$ المسطحة أن زاوية $اس$ هي الأكبر أقول أن $اس > اس + اس$ * لأنه إذا أنشئت زاوية $س$ في مستوى $اس$ مساوية لزاوية $س$ ورسم خط $ا$ المستقيم كيفما اتفق واخذ $س = س$ ووصل $ا$ و $ب$ فنكون ضلعي $س$ و $س$ مساويين ضلعي $س$ و $س$ واتساري زاويتي $س$ و $س$ بالعمل يلزم تساوي مثلتي $س$ و $س$

و - سه \neq ر \neq د لكن $ا > ا + ا$ \neq ر
 فاذا طرح من أحد طرفي هذين الغير المتساويين ر ومن الآخر ر
 المساوي له يبقى $ا > ا$ ومن تساوى ضلعي ا سه و سه لضلعي
 ا سه و سه وحيث ان اء الثالث اصغر من اء تكون زاوية ا سه
 $>$ ا سه (١٠٠ مقالة ١) فاذا اضيف الى كل من طرفي هذين الغير المتساويين
 زاويتا ر سه و ر سه المتساويتان يثبت المطلوب من ان $ا$ يكون
 $ا سه + سه سه او ا سه > ا سه + ر سه$

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية)

مجموع الزوايا المسطحة التي تحيط بالجسم لا يزال اصغر من اربع قوائم
 (شكل ١٩٦) اذا قطعت زاوية سه الجسم بمستوتما ا ر د ه ووصلت
 خطوط وا و ور و و د و وه من نقطة و المفروضة على ذلك
 المستوى الى سائر رؤس الزوايا فيكون عدد المثلثات ا سه و ر سه و د سه
 الخ التي داخل الجسم ورأسها سه ومجموع زواياها مكافئ لعدد المثلثات
 المجمعة في نقطة واعني ا ور و ر و د و الخ ومجموع زواياها ولكن
 حيث ان مجموع زاويتي ا سه و ر سه المجمعتين في نقطة ر اي زاوية ا ر
 اصغر من مجموع زاويتي ا سه و سه و كذلك ما كانت في نقطة د فحو
 $ر د و + د ر > ر سه + سه د$ وكذا سائر زوايا كثير الاضلاع
 ا ر د ه هي الاصغر فتبين ان مجموع الزوايا التي توجد على قواعد المثلثات
 المجمعة رؤسها في نقطة و اصغر من مجموع الزوايا التي توجد على قواعد
 المثلثات المجمعة رؤسها في نقطة سه ومن ثمة عبارة مجموع الزوايا المرسومة حول
 نقطة و اكبر من مجموع الزوايا التي في نقطة سه نظرا لمكافأة الجسم وعين*
 لكن مجموع ما حول نقطة و من الزوايا اء او لاربعة قوائم (٦ مقالة ١) ومن
 اجل ذلك يثبت المطلوب من ان يكون مجموع الزوايا التي تصير زاوية سه الجسم
 اصغر من اربع قوائم

تنبيه شرط في هذه الدعوى ان تكون الجسم محدبة واذا امتداد سطوحها

ولا يقطعها

*** (الدعوى الثالثة والعشرون النظرية) ***

إذا تركيب الزاويتان المجسمتان من ثلاث الزوايا المسطحة المتساوية المتناظرة
فالاختلاف الذي بين المستويين المتساوي الزوايا يكون متساويا
مثلا (شكل ١٩٧) إذا كانت الزوايا التي تحيط بزاويتي س ه و ط المجسمتين
زاوية أ س ه = زاوية د ط و وزاوية أ س ر = زاوية د ط ه وزاوية
أ س د = زاوية ه ط و فالاختلاف بين مستويي أ س ه وأ س د يساوي
اختلاف مستويي د ط و و د ط ه

فيؤخذ سهـ كينما اتفق وينزل عمود سهـ ع من نقطة سهـ على مستوى
 اسـهـ ويقام عمودا ع ا و ع د على سهـ ا و سهـ د من نقطة ع ملتقى
 للعمود المرقوم بذلك المستوى ويوصل ا ب و سهـ ثم يؤخذ ط هـ مساويا لخط
 سهـ د وينزل عمود هـ ف على مستوى د ط و ومن نقطة ف يقام عمودا
 ف د و ف و على ط د و ط و * ثم اذا وصل د هـ و هـ و فيصير مثلث
 سهـ ا ب قائما في زاوية ا ومثلث ط د هـ في زاوية د وحيث ان زاوية
 اسـهـ د = د ط هـ فزاوية سهـ ا = ط هـ د واكبر سهـ د = ط هـ
 يكون مثلث سهـ ا ب مساويا للمثلث ط د هـ فلذا سهـ ا = ط د و ا ب
 = د هـ وبمثل هذا يكون سهـ د = ط و و سهـ د = هـ و

فإذا كان الأمر كما ذكر أولاً من سماع ٧ ذا الأربعة الأضلاع مساوياً
الأربعة الأضلاع طرف و

لأننا إذا وضعت زاوية α على مساويتها γ وطو فـ α = γ ط د
و α = γ ط و تقع نقطة α على نقطة γ ونقطة γ على نقطة α وإذا
لترجع α العمود فوق α على γ العمود على γ و أيضا يوجد γ
على γ و تقع نقطة γ على α فيصير α = γ لكن لقيام مثلثي
 α - γ و γ في انطبق γ و α و تساوى α و γ و ترى القائمتين
من - ما وضع α بضلع γ يكونان متساويين (مقالة ١) فتكون زاوية

ع ا = ف د ه و حيث ان زاوية ع ا = هي الانحراف بين مستويي
 ا س = و ا س = و زاوية ف د ه هي الانحراف بين مستويي د ط ه
 و ط و فتد صارا الانحرافان المرقومان متساويين
 واما كون ا زاوية مثلث ع ا = القائم الزاوية انحرافا للمستويي ا س =
 و ا س = فذلك مادام عود ع واقعا في طرف س = نظرا لخط س ا واما
 اذا وقع في طرف آخر فيكون الانحراف بين المستويين المرقومين زاوية منفرجة
 حيث لو اضيف اليها ا زاوية مثلث ع ا = فيحصل قائمتان * لكن حينئذ
 يكون انحراف مستويي ط د ه و ط د و زاوية منفرجة لو ضم اليها د زاوية
 مثلث د ف ه لحدث قائمتان وحيث لا انفكاك للتساوي عن زاويتي ا و د
 يحكم بان يكون الانحراف بين مستويي ا س = و ا س = مساويا للانحراف
 بين مستويي ط د ه و ط د و

تنبيه اذا تركبت الجسمتان من ثلاث الزوايا المسطحة المتناظرة مع اتحاد الوضع
 بين الزوايا المسطحة المتناظرة أو المتساوية في كايهما فتمسيران متساويين واذا
 وضعت احدهما على الاخرى تطبقان وقد ثبت انه ممكن ان يضع ذى الاربعة
 الأضلاع س ا ع د على مساوية ط د ف و

فاذا وضع س ا على مساوية ط د يقع س د على ط و ونقطة ع على
 نقطة ف وان كان لوجود التساوي بين مثلثي ا ع = و د ف ه يكون خط
 س ع العمود على مستوي ا س = عمودا على خط ف ه العمود على مستوي
 ط د و فـ لا عن اتحاد جهة العمودين المرقومين فوقعت نقطة = على نقطة
 ه و خط س = على ه ط فـ اجل ذلك تطابقت الزاويتان الجسمتان
 تطابقتا

واما هذه المطابقة فتكون في الزوايا المجسمة الموضوعة على نسق واحد وفي غيرها
 لا تكون * لان الزوايا المسطحة اذا كانت موضوعة على عكس الترتيب أو كان
 عمودا ع = و ف ه تحتل في الجهة في محل اتحاد الجهة نظرا الى مستويي ا س =
 و ط د و فيمنع انطباق الزاويتين المجسمتين لكن لوجود التساوي بين انحرافات

المستويات المتساوية الزوايا فلا خال فيما ورد في هذه الدعوى فان تطبيقها
لامدخل له في ذلك لان الزوايا المجسمة لم تنزل الاقسام التي تركبت منها والمساواة
التي بينهما باقية الا انه يتنوع التطبيق بسبب عكس الترتيب وحيث ان المساواة
واقعة ولكن ليست بطريق المطابقة اعني التساوي مع اتحاد الترتيب سميت زوايا
مجسمة متساوية بالتماثل

مثلا اذا تركبت الزاويتان المجسمتان من ثلاث الزوايا المسطحة المتساوية
المتناظرة وكاتسا على عكس الترتيب وضعا يقال لهما تين الزاويتين المجسمتين
متساويتان بالتماثل أو يقال مقابلتان واستحسن اطلاق ذلك عليهما

وما ذكر في هذا الباب لا يختص بالمجسمة الثلاثية بل يجري على ما تركبت من
ثلاث الزوايا المستوية فصاعدا فاذا تركبت زاوية مجسمة من α و β و γ
و δ و ϵ و ζ الزوايا المسطحة وتركت أخرى من α و β و γ و δ و ϵ و ζ
المرفومة عينا بعكس الترتيب فجميع الميل الذي بين المستويات المتساوية يكون
متساويا ولا متنازع الانطباق يسميان زاويتين مجسمتين مقابلتين

واما في الاشكال المسطحة بوجود التماثل فلا يقع التساوي لان التساوي بينهما
مطلوب معنى بالمطابقة * حيث يمكن تحويل الاشكال المسطحة الى كل وجه
واما في الاجسام فليس كذلك لان التساوي فيها اما بالمطابقة واما بالتماثل فقط
(الدعوى الرابعة والعشرون العملية) *

طريق استخراج الزاوية التي بين المستويين من زاوية مجسمة معلومة الزوايا
المسطحة الثلاث

مثلا (شكل ١٩٨) اذا كانت الزاوية المصممة المجسمة α وزواياها المسطحة
 α و β و γ و δ معلومة واريدها استخراج الزاوية التي بين اثنتين
من تلك الزوايا المسطحة مثلا اذا كانت الزاوية المطلوبة ما بين مستويي α و β
و γ فاذا اجري او تصور اجراء العمل المرسوم في الدعوى المتقدمة
تكون زاوية ϵ هي الزاوية المطلوبة

وانما المراد اعمال هذه الزاوية عينا على سطح مستوي بطريقتي التسطيف

فلاجل اجراء ذلك أقول اذا علمت زوايا رسمه و رسمه مساوية
لزوايا رسمه و رسمه التي في المجسمة على مستوي واحد واخذ كل
واحد من خطي رسمه و رسمه مساويا لخط رسمه في المجسمة وأنزل عمودا
 رسمه و رسمه من نقطتي رسمه و رسمه على رسمه و رسمه فهذان العمودان
بالتقيا في نقطة ع

فيسم نصف محيط رسمه بنصف قطر رسمه يجعل نقطة ا مركزا فاذا
أخرج عمود ع من نقطة ع على رسمه يلتقي بالمحيط في نقطة ر فاذا وصل
ا ب فزاوية ه ا ر الحادثة هي الانحراف بين مستويي رسمه و رسمه
المطلوب والمعنى ان مثلث ع ا ر في المسطحة يرى عين من ا ع ر
في المجسمة ولقباهم مثلثي رسمه و رسمه في نقطة ا ونساويهما في زاويتي
س ه المتقابلة بين تساوي زاويتي ر و رسمه وتساوي وترى رسمه و رسمه
يلزم تساوي ذينك المثلثين وخط رسمه في المسطحة يساوي خط رسمه في المجسمة
وأیضا خط ا ر في المسطحة أو ا ر المساوي له يساوي ا ر في المجسمة وأيضا
س ه يتساوى فيهما ومن ذلك يكون الشكل ذو الاربعة الاضلاع س ه ا ر
مساويا لنفسه في كل منهما فاذا صار ا ر في المجسمة يساوي خط ا ر في المسطحة
وثبت ان مثلثي ا ع ر و ا ع ر القائمي الزاوية متساويان في كليهما لتساوي
وترى قائمتيهما و ا ح ا د اضلاعهما ومن اجل ذلك ظهر ان زاوية ه ا ر التي
وجدت بطريق تسطيح الزاوية تساوي الانحراف بين مستويي رسمه و رسمه
في الزاوية المجسمة وان وقعت نقطة ع بين نقطتي ا و ر تنفرج زاوية ه ا ر
وعلى اى حال لم يزل الانحراف الحقيقي بين المستويين مقدارا لها

فعلى ذلك اشير الى الانحراف بمحروف ه ا ر ولم ينسأ اليه بمحروف ع ا ر ليعلم
انه ليس له الا ذلك الانيات في كل الوجوه

تنبيه برسؤال وهو اذا اخذت ثلاث زوايا مسطحة كيفما اتفق هل يمكن بها
تشكيل مجسمة او لا

بواسطة $حسـه$ زاوية $هـ ا ب$ والمستويان $الـ$ $ا ن$ $ر$ ان معلومان كذلك يمكن

استخراج $حسـه$ بواسطة $هـ ا ب$ وبه تحل الدعوى

فيؤخذ $سـه$ كيفية ما اتفق وينزل $عـود سـه$ $هـ$ الغير المحدود على $سـه ا$

وتعمل زاوية $هـ ا ب$ مساوية لما بين المستويين المعلومين ومن نقطة $ب$ ملتحق

المحيط المرسوم بنصف قطر $اـ$ من مركز $ا$ نهاية ضلع $ا ب$ ينزل $عـود بـع$

على $ا هـ$ ومن نقطة $ع$ يترك $عـود عـه$ الغير المحدود على $سـه هـ$ ويفتح

الى نقطة $سـ$ بان يكون $سـه = سـه$ فزاوية $حسـه هـ$ هي الزاوية

المسطحة المطلوبة

لانه لو رسمت زاوية مجسمة بالثلاث زوايا المسطحة $سـه ا$ و $ا سـه هـ$ و $حسـه هـ$

لوجد الانحراف الذي بين مسطحتي $ا سـه هـ$ و $ا سـه هـ$ المعلومتين مساويا

لزاوية $هـ ا ب$ المعلومه

تنبيه (شكل ١٩٩) اذا تصورت زاوية مجسمة ذات اربع وجوه اى تصورت من

$ا سـه هـ$ و $سـه هـ حـ$ و $حسـه د$ و $د سـه ا$ الزوايا المسطحة فلاجل تحديد الانحرافات

هذه المستويات لا يكتفى بكونها معلومة

لانه يمكن ان يرسم بهذه السطوح الاربع زوايا مجسمة متعددة لكن اذا زيد على

ما ذكر شرط وهو ان يكون الانحراف بين مستويي $ا سـه هـ$ و $سـه هـ حـ$

معلوما تتعين الزاوية المجسمة ويتعين $كـل$ انحراف واقع بين اى

مستويين

فاذا تصور تشكيل مجسمة ذات وجوه ثلاثة من الزوايا المسطحة $ا سـه هـ$ و

$سـه هـ حـ$ و $ا سـه د$ وكان الاولان وما بينهما من الانحراف معلوما تتعين

$ا سـه هـ$ الثالثة بما صرح به من الحل فى هذه الدعوى ثم ترى الاخرى

تركبت من $ا سـه هـ$ و $ا سـه د$ و $د سـه ا$ الثلاث زوايا المسطحة

المعلومة ومتى كانت الزوايا الثلاث المرقومة معلومة تصير المجسمة

محدودة

وحيث تبين تحديد الزاوية الثلاثية المجسمة بتعين المجسمة الرباعية لانها تنقسم الى ثلاثيتين

واما زاوية مستوي اسم α و β فتعين بواسطة الزاوية المجسمة الثانية الجزئية واما الزاوية الكلية التي بين مستوي α و β فتساوي مجموع ما بين مستوي α و β وما بين مستوي α و β الجزئيين

وكذا يقال في المجسمة التي لها خمسة اوجه فلا بد من تعيين اثنين من انحرافاتهما فضلا عن ان تكون زواياها المسطحة معينة وكذلك في المجسمة التي لها ستة اوجه فلا بد فيها من ثلاثة انحرافات معاومة فضلا عن ان تكون زواياها المسطحة معينة وهكذا على التوالى يجرى العمل المذكور

(المقالة السادسة)

في بيان الاجسام المحاطة بسطوح مستوية

المحدود

حدد ١ كل جسم محاط بسطوح مستوية يسمى كثير السطوح أو كثيرا القواعد وهذه السطوح لابد ان تحاط بخطوط مستقيمة وتكون وجوها لكثير السطوح فمنها ما كان له اربعة اوجه ويسمى ذا اربع قواعد وما له ستة يسمى ذا ست قواعد وما له ثمانية يسمى ذا ثمان قواعد وما له ثنا عشر يسمى ذا اثني عشرة قاعدة وما له عشرون يسمى ذا عشرين قاعدة

ذو الاربعة القواعد هو مجرد كثير السطوح * لان الزاوية المجسمة اقل ما يلزم لتشكيلها الالة مستوية ويبقى انفتاح فلاجل انغلاقه احتج الى رابع مستو الفصل المشترك بين وجهي كثير السطوح يسمى ضلعا أو حدا أو حرفا

٣ الجسم الذي جميع وجوهه اشكال مستقيمة الاضلاع منتظمة متساوية وجميع زواياه المجسمة متساوية يسمى كثيرا القواعد المنتظم وعددها خمسة اشهرت بالاشكال الافلاطونية وقد ذكرت في مقالات المقالة السادسة والسابعة فنامل ٤ المنشور ما احيط بسطوح متوازية الاضلاع وكان طرفاه محدودين بشككين مستقيمي الاضلاع متساويين ومتوازيين

(شكل ٢٠٠) مثلالاجل رسم هذا المنشور اذا كان احد هذه اى تشكل مستقيم الاضلاع ورسمت خطوط $ور$ و $دح$ و $ط$ الخ مساوية ومتوازية لاضلاع $ا$ و $ر$ و $د$ الخ في مستو مواز لمستوى $ا$ و $ر$ الخ فالشكل الحادث $ورح ط$ يكون مساويا للشكل $ا$ و $ر$ و $د$ الخ المستقيم الاضلاع المرقوم فاذا وصلت رؤس الزوايا المتناظرة من هذين الشكلين بخطوط $او$ و $ر$ و $د$ و $ح$ الخ بصير جسم $ا$ و $ر$ و $د$ و $ح$ ط الخ المحاط بوجوه $ا$ و $ر$ و $د$ و $ح$ الخ المتوازية الاضلاع منشورا

٥ الشكلان المستقيمان الاضلاع ارحوه و ورح ط يسميان قاعدتي المنشور وجميع السطوح المتوازية الاضلاع الاخر تسمى وجوه المنشور وخطوط او و س ر و ح الخ المستقيمة المتساوية تسمى اضلاع المنشور
٦ ارتفاع المنشور هو البعد الذي بين القاعدتين أو العمود النازل من نقطة من القاعدة العليا على القاعدة السفلى

٧ اذا كانت اضلاع المنشور او و س ر و ح الخ عمادا على مستوى القاعدة فهو قائم وكل واحد منها حيث نذ بساوى الارتفاع والافهم مائل ويكون ارتفاعه اصغر من ضلعه

٨ المنشور الذي تثلث قاعدته يسمى مثلثيا وما تربعت قاعدته يسمى مربعيا وما تحمست قاعدته يسمى خماسيا وما تسدست قاعدته يسمى سداسيا وهكذا
٩ (شكل ٢٠٦) اذا كانت قاعدة المنشور متوازي الاضلاع وكانت كافة وجوهه ايضا متوازية الاضلاع يسمى متوازي السطوح وهو حاصل من احاطة ستة اشكال متوازية الاضلاع وان كانت وجوه متوازي السطوح مستطيلة يسمى متوازي المستطيلات

١٠ متوازي المستطيلات اذا تركب من احاطة ست مربعات متساوية يسمى مكعبا او ذات قواعد منتظمة

١١ (شكل ١٩٦) الاهرام جسم حاصل من احاطة مستويات متشابهة خرجت من نقطة س وانتهت الى جميع اضلاع مستوى ارحوه المستقيم الاضلاع ويسمى قاعدة الاهرام ونقطة س تسمى رأس الاهرام ومجموع مثلثات اسه

و سه الخ يسمى اجنحة الاهرام أو سطوحه المضلعة أو كافة وجوه الاهرام
١٢ ارتفاع الاهرام هو العمود النازل من رأسه على قاعدته او على المستوى الممتد منها

١٣ الاهرام الذي تثلث قاعدته يسمى مثلثيا والذي تربعت قاعدته يسمى مربعيا وهلم جرا نظرا الى قاعدته

١٤ اذا كانت قاعدة الاهرام شكلا مستقيما الاضلاع منتظما وكان العمود

النازل من رأسه على قاعدته يمر عبر مركز مستوى القاعدة يسمى هذا الاهرام منتظما وحينئذ يسمى هذا العمود محورا

١٥ قطر كثير القواعد وكثير السطوح هو الخط المستقيم الواصل بين رأسي
الزاويتين المجتمعتين غير المتجاورتين

١٦ كثير السطوح المتماثلان هما جسمان واقعان على قاعدة مشتركة أحدهما فوق القاعدة والآخر تحتها ومرسومان على سبيل واحد مع وقوع زواياهما الجسم المتناظرة على الخطوط المستقيمة العماد على مستوى القاعدة الموضوعة على ابعاد متساوية منه

مثلا (شكل ٢٠٢) اذا كان خط سـهـ ط المستقيم عودا على مستوى ا-ح
ومنقسما: تساويين في نقطة و ملتقما بذلك المستوى فشكل ا-ح
و ط ا-ح كثيرا السطوح الواقعة ان على القاعدة المشتركة يقان ثلاث

١٧ الاحرمان المتشايان اذا تشابه منهما مشى الوجهه على التناظر وعائل فيهما
الوضع وتساوى فيهما الميل فهما متشايان

(شكل ٢٠٣) مثلاً إذا كانت زاوية $\alpha = \gamma$ وهو وزاوية $\beta = \delta$
هـ و وزاويه $\alpha = \epsilon$ وهـ ط وزاوية $\beta = \zeta$ هـ و ط في وجهي
أهرامى $\alpha - \beta$ و $\epsilon - \zeta$ وهـ و ط فضلا عن أن يكون الميل بين مستويي
 $\alpha - \beta$ مساويا للانحراف بين مستويي $\epsilon - \zeta$ وهـ و ط فالأهرامان
المرقومان يتشابهان

١٨ اذ ارسم مثلث بوصل ما بين ثلاث نقاط ماخوذة على وجهه من كثير السطوح
أو على قاعدته وجعل المثلث المرقوم قاعدة مشتركة وتصور في الدهن وجود
أهرامات بعد درؤس الزوايا المجسمة التي لم تكن على مستوى تلك القاعدة فكل
واحد من هذه الأهرامات يعين وضع كل زاوية مجسمة كانت في كثير السطوح
نظر الى القاعدة

اذا تشابهت قاعدتا كثيرى السطوح وتعبئت رؤس الزوايا المجسمة المتناظرة فيهما باهرامات مثلثية متشابهة متناظرة فهما متشابهان

١٩ نقط رؤس الزوايا الجسم من كثير السطوح تسمى رؤس كثير السطوح اعلم ان ما ذكر من كثير السطوح في هذا الباب هو ما كانت جميع زواياها مستخرجة وهو المحدث وقد ذكر تعريفه في السطوح بما لا يقطع المستقيم الا في نقطتين فقط فكذلك ما كان ههنا من الاجسام الكثيرة السطوح فانه اذا امتد احد وجوهه فلا يقطع جسمه ابدا ولا يمكن وقوع جزء من الجسم فوق ما احاطه من مستوالات آخرته فلذا اتمام الجسم يقع في احدى جهتي المستوي الذي يحيط به

(الدعوى الاولى النظرية)*

كثير السطوح لا يمكن اتحادهما عددا ولا تكون رؤسهما عينيا مالم ينطبقا فاذا فرض وجود احد كثير السطوح حاضرا واريدا اعمال آخره رؤس رؤسه متحدة في العدد فلا بد ان يمر كل مستو مما يرا د اعماله بعين نقط كل مستو مما كان حاضرا والالزم التخالف بينهما ولكن ان لم يمر كل مستو من ذات تلك النقط فيقتضي ان تكون المستويات المرقومة تقطع كثير السطوح الاول وتكون رؤسه بعضها فوق المستويات القاطعة وبعضها تحتها وهذا بخلاف ما ذكر في الهدية فلذا وجب انطباق كثير السطوح واتحاد زواياهما عينيا وعددا

تنبيه رسم كثير السطوح من نقط ا و ب و ج و د الخ رؤسه المعينة المنظورة معلومة وكذا اضلاعه لاسرة فيه

اولا (شكل ٢٠٤) فاذا انتخبت ثلاث نقط د و ه و ح متجاورات وهرمها بمستوى د ه ح فكذلك يمر بنقطتي ك و ل الاخرين ولا بد ان يكون جميع تلك النقط واقعة في احد طرفي مستوى د ه ح أو د ه ح ك ل فيكون احد وجوه الجسم الكثير السطوح

ثانيا اذا مر بمستوا آخر على ضلع ه ح احد اضلاع ذلك المستوى ودور حقي صادف نقطة و الاخرى أ ونقطتي د و ط فمستوى د ه ح أو د ه ح ط يكون الوجه الثاني من كثير السطوح وهلم جرا حتى يتم رسمه فهذا هو كثير

السطوح المطلوب لانه لا يكون جسمان اثنان مع اتحاد الرؤس

(الدعوى الثانية النظرية)

في كثيرى السطوح المتماثلين تكون الوجوه المتناظرة متساوية والميل والانحراف بين كل اثنين متجاورين من الوجوه في احدهما مساويا للنظير في الاخر

(شكل ٢٠٥) مثلا اذا كان مستوى $ا ر ح$ و $د ه$ قاعدة مشتركة بين كثيرى السطوح وكانت نقطتا $م و ن$ زاويتي احدهما المجسمتين $م و ن$ نظيرتيهما في الاخر فعلى ما ذكرى تعريف التماثل يصير خطا $م م و ن ن$ عمودين على مستوى $ا ر ح$ وينقسمان بتساويين في نقطتي $ك و ل$ ملتقيهما بالمستوى المرقوم فاذا كان الامر كما ذكرى يصير بعد $م ن$ مساويا لبعدهم $ن$ لانه اذا دورشبه منحرف $ك م ن ل$ حول كل حتى ينطبق على مستوى $ك م ن ل$ فضع $ك م$ ينطبق على مساويه $ك م$ ويقع ضلع $ل ن$ على $ل ن$ وذلك لقسام زاويتي $ك و ل$ ولتساوى تلك الاضلاع يتحدان فلذا صار $م ن = م ن$ لمطابقة شبهى المنحرفين تماما وايضا يصير $م س = م س$ و $ن س = ن س$ كما ثبت آنفا لتناظر مجسمة $س$ العليا المجسمة $س$ السفلى فإى مثلث مثل $م ن س$ حاصل بوصائل رؤس المجسمات العليا يساوى مثلث $م ن س$ الحادث بوصائل السفلى ومن هذه المثلثات المرقومة اذا نظر الى ما كان مشكلا في وجوه كثيرى السطوح خاصة يتبين ان تلك الوجوه تركبت من مثلثات متساوية متناظرة قد اتحد عددها ومن المثلثات المرقومة ما اذا وقعت على مستوا واحد وتشكل منها وجه من كثير السطوح فنظائرهما من المثلثات بهما يتشكل وجه كثير السطوح الاخر النظر للاول

فاذا فرض ان مثلثي $م س ن$ و $ن س و$ المتجاورين في مستوا واحد وكان مثلثا $م س ن$ و $ن س و$ نظيرى الاولين تكون زاوية $م ن س = م ن س$

وزاوية $\text{سه د و} = \text{سه د و}$ فاذا وصل م د و وثلاث م د و
 يساوي ذلك م د و فزاوية $\text{م د و} = \text{م د و}$ ولكن يجب ان يشكل
 م د و واقع على مستوي واحد تكون زاوية $\text{م د و} =$ مجموع م د سه
 $+ \text{سه د و}$ وايضا $\text{م د و} = \text{م د سه} + \text{سه د و}$ فان لم تحتلط م د سه
 و سه د و و د و م وتصبح مستويا واحدا حدث منها زاوية مجسمة

واذا لم ان تكون زاوية $\text{م د و} > \text{م د سه} + \text{سه د و}$ (٢٠ مقالة ٥)
 وهذا محال لانه قد ثبت ان زاوية $\text{م د و} = \text{م د سه} + \text{سه د و}$ وانساوي
 وعنده بين يمين تمنع فوجب وقوع مثلثي م د سه و سه د و على
 مستوي واحد

فقد ظهر من هذا الاثبات ان الاشكال كثيرة السطوح المتماثلة تصوز على مستويات
 متناظرة متحدة العدة متوافقة متساوية سواء كانت تلك المستويات مثلثية
 او اى شكل مستقيم الاضلاع اما الشق الاول من هذه الدعوى فقد ثبت واما
 تساوي الانحرافات المتناظرة فاثباته سيأتي

مثلا اقول ان مثلثي م سه د و د سه و مرسومان في مستويين وجهي كثير
 السطوح المتجاورين على د سه الحرف المشترك ومثلثا م سه د و د سه و
 مناظران لهما وجهيت يمكن تصور تشكيل زاوية مجسمة في نقطة د على سطحان

م د و و م د سه و سه د و الثلاثة واخرى في نقطة د بسطوح م د و
 و م د سه و سه د و الثلاثة الاخرى قد ثبت تساوي هذه المسطحة على المناظر
 كما في الشق الاول من هذه الدعوى فعلم ان الانحراف بين مستويي م د سه
 و سه د و مساو للانحراف بين مستويي م د سه و سه د و نظرا ليريهما
 (٢٢ مقالة ٥) فعلم من الشطر الاول والثاني من هذه الدعوى ان كل جسمين
 كثيري السطوح متماثلين تكون وجوههما المتناظرة متساوية ويكون كل
 انحراف بين مستويين وجهي احدهما مساويا لظايفه في الآخر

تنبيه تماثل كل زاويتين مجسمتين متناظرتين من هذين الجسمين لان زاوية د

المجسمة كما رسمت بمستويات م د س ه و س د و و د س الخ
فكذلك زاوية د تظيرتها تشكلت بمستويات م د س ه و س د و و د س
الخ فكانت مجسمة د وقعت على وضع ترتيب الأخرى ولا تزال مماثلة للأخرى
وان كانت مقابلة الوضع نظر الأخرى وذلك لتساوي الانحرافات المتناظرة
على التوالي (مقاله ٥ تنبيهه ٣٢)

فقد ظهر من هذا التنبيه ان كثير السطوح لا يماثلها الا واحد فقط * لانه لو انشئ له
مثيل آخر على قاعدة أخرى لتساوت جميع ابعاده بابعاد المثيل الاول مع اتحاد
الوضع فيهما واذا صار عينه

(الدعوى الثالثة النظرية)

يتساوى المنشوران اذا تركبت آحاد زواياهما المجسمتان من ثلاث سطوح
متساوية بالتناظر مستوية متشابهة الوضع

(شكل ٢٠٠) مثلاً اذا كان في المستويات التي احاطت زاويتي س و س
المجسمتين قاعدة ا ح د ه مساوية لقاعدة ا ح د ه ومتوازي الاضلاع
ا ب ر و مساويا لمتوازي الاضلاع ا ب ر و ومتوازي الاضلاع ا ب ر و
مساويا لمتوازي الاضلاع ا ب ر و يكون منشور ا ب ح ط مساويا لمنشور
ا ب ح ط

لانه اذا وضعت قاعدة ا ح د ه على مساويتها ا ح د ه فينطبقان تماماً
وحيث ان الزوايا المسطحة الثلاث التي تحيط بزاوية س المجسمة مساوية
لظايرها التي تحيط بزاوية س يعني ا ب د = ا ب د و ا ب د = ا ب د
و ر س ه = ر س ه وتساوية الوضع كانت زاويتا س و س المجسمتان
متساويتين ومن ثمة يقع ضلع س ر على مساوية س د ويلزم من تساوي
متوازي الاضلاع ا ب ر و ا ب ر و ان يقع ضلع ر و على ضلع ر و وايضا
ضلع ر ح على ضلع ر ح ولوجود التساوي بين قاعدتي المنشورين المتساويين

يلزم التساوى بين قاعدتيهما العاليتين وللمطابقة معنى الاضلاع من قاعدتيهما
 العاليتين لزم انطباقهما كلياً اعني ان تكون قاعدة وروح طے العلم بالمنطقة
 على قاعدة وَرَح طے الاخرى تماماً فعلى هذا صار الجسمان المرقومان
 متعدي الرأس عدداً وعينا وصاراً جسماً واحداً (الاولى)

نتيجة بتساوى المنشوران القائمان اذا تساوت منهما القاعدة والارتفاع لانه
 من تساوى القاعدتين يلزم ان يكون ضلع a مساوياً لضلع a' وحيث
 فرض تساوى ارتفاع b بارتفاع b' دُخِلَ مستطيل a'' و b'' يساوى
 مستطيل a' و b' وايضاً مستطيل a و b يساوى مستطيل a' و b'
 فالثلاثة المستوية المحيطة بزواوية c ساوت الثلاثة المحيطة بزواوية c' فعلى
 منطوق الدعوى صار المنشوران المرقومان متساويين
 * (الدعوى الرابعة النظرية) *

في كل جسم متوازي السطوح المستويان المتقابلان متساويان ومتوازيان *
 فعلى تعريف هذا الجسم حيث ان قاعدتيه a و b و هورح متوازيان
 الاضلاع متساويان و اضلاعهما متوازيه وبهذا ثبت تساوى وتوازي الوجوه
 المتطرفة فهو a و b و c المتقابلين الواقعة بين تلك القاعدتين
 وتوازي اضلاع شكل a و b يكون ضلع a مساوياً وموازياً لضلع a'
 وايضاً لتوازي اضلاع شكل a و b يصير ضلع a موازياً ومساوياً لضلع
 a' فلذا كانت زاوية a مساوية لزاوية a' و (٣ امقالة ٥) ومستوى
 a موازياً لمستوى a' و فيكون متوازي الاضلاع a و b مساوياً
 لتوازي الاضلاع a و b وكذا ثبت تساوى وتوازي متوازي الاضلاع
 a و b و هورح الاخيرين وبه ثبت المطلوب

نتيجة حيث ان متوازي السطوح قد احيط بستة مستويات منها كل اثنين
 متقابلين متوازيان ومتساويان قد أمكن ان نأخذ أى وجه من وجوهه أو مقابله
 قاعدة له

تنبه اسواه و اد ثلاثة خطوط مستقيمة وفروضة تمر بنقطة ا وتحدث
بينها زوايا معلومة يمكن ان يرسم بها جسم متوازي السطوح ويحصل ذلك برسم
مستويات من نهاية كل من تلك الخطوط بان يكون كل مستوهر من نهاية احدها
موازيا للمستوى المار من الاخرين مثلا اذا مر بمستوى من نقطة س مواز
لمستوى داه ومن نقطة و بمستوى مواز لمستوى ساه وهر من نقطة
هه بمستوى مواز لمستوى ساه فالتوازي السطوح المطلوب يتصور ويتشكل
من احاطة هذه المستويات المتلاقية

(الدعوى الخامسة النظرية)

في كل جسم متوازي السطوح الزاويتان المجسمتان المتقابلتان متماثلتان
والقطران الواصلان بين رؤس تلك الزوايا يقطعان تنصيفا
(شكل ٢٠٦) أولا اذا قدرت زاوية ا المجسمة بزاوية د المقابلة لها اقول
حيث ان زاوية هـ ا ب مساوية لزاوية هـ و ر وزاوية ح د ر وايضا
زاوية داه = دح هـ = ح و ر وايضا زاوية داه = دح ر =
ح و ر فصارت كل واحدة من الزوايا المسطحة التي تحيط بزاوية ا
المجسمة مساوية لكل واحدة من نظائرها التي تحيط بزاوية د المجسمة
الاخرى مع مخالفة الوضع فلذا صارت زاويتا ا و د المجسمتان متماثلتين
(٢٤ مقالة ٥)

ثانيا اذا وصل ا د و هـ هـ بين الرؤس المتقابلة على ان يكونا قطر ين فوجود
التساوى والتوازي بين خطي ا هـ و ح ر يكون شكل ا هـ ح ر متوازي
الاضلاع فلذا يتقاطع قطرا هـ ح و ا د على التساوى وكذا قطرا هـ ح و د و
ومن ثمة تظهر ان الاقطار الاربعة في متوازي السطوح ينصف بعضها بعضا في
نقطة واحدة وهذه النقطة كأنها مركز ذلك الجسم

(الدعوى السادسة النظرية)

(شكل ٢٠٧) مستوى س د ح و المار بمحرفي س و د المتقابلين
التوازيين في اى متوازي السطوح فهو ا ر ح و د ح ر يقسم ذلك الجسم الى

منشورين مثلثين متماثلين نحو $ا د ح$ هو $و ر ح$ و $د ح$
 أولا هذان الجسمان يكونان منشورين * لان مثلثي $ا د ح$ و $ه د ح$ متساويان
 لتساوي وتوازي اضلاعهما ثانيا حيث ان الوجوه المتطرفة $ا د و ه$ و $ا د ح$
 و $د ح و$ متوازية الاضلاع فالجسمان المرقومان يكونان منشورين متماثلين *
 لان منشور $ا د ح$ يرمم على قاعدة $ا د$ بان يكون مماثلا لمنشور
 $ا د و ح$ ومستوى $ا د و ه$ مساو لمستوى $ا د و ه$ الما صرح به
 في الدعوى الثانية وكذا مستوى $ا د ح$ مساو لمستوى $ا د ح$ و اذا
 صار التقدير بين منشوري $ر ح و د ح$ و $ا د ح$ هو تكون قاعدة
 $ر ح و$ مساوية لقاعدة $ا د$ ومتوازي الاضلاع $ر ح د ح$ يساوي
 $ا د و ه$ و $ا د و ه$ وايضا متوازي الاضلاع $ر و د ح$ يساوي متوازي
 الاضلاع $ا د ح$ و مساويه $ا د ح$ و حيث ان المستويات الثلاث المحيطة
 بزواوية $د$ المجسمة في منشور $ر ح و د ح$ تساوي نظائرها الثلاث التي تصور
 زاوية $ا$ المجسمة في منشور $ا د ح$ هو ولتشابه الوضع في كل منهما يتساوى
 ذاك المنشوران تطابقا وتمثل $ا د ح$ هو احدهما هذين المنشورين منشور
 $ا د ح$ هو يكون $ر ح و د ح$ المنشور الاخر مماثلا لمنشور $ا د ح$ هو
 ويثبت المطلوب

(الدعوى السابعة النظرية)

(شكل ٢٠١) في كل منشور $ا د ح$ ط د تقاطع كل $د ح$ و
 $و ر ح$ و $د ح$ الحادثة من المستويات المتوازية تكون اشكالا مستقيمة
 الاضلاع متساوية

لا تضلعي كل $و ر ح$ المتوازيين فصلا من مستر كان بين المستويين
 المتوازيين وبين $ا د و$ المستوى الثالث ولوقوعهما بين ضلعي المنشور
 $ر ح و$ فل يكون شكل $ر ح د$ متوازي الاضلاع فلذا صار كل
 $= ر ح$ و يثبت ان $ا د$ و $د ح$ و $د ح$ المتوازيات متطوع

كلمة تساوى ف ص ه و ص ه و و ص ه و الخ اضلاع مقطع
ع ف ص ه و على التوالي ولوجود التوازي بين هذه الاضلاع فضا لعن
التساوى تكون كلم ولم ه الخ زوايا المقطع الاول تساوى ع ف ص ه
و ف ص ه و الخ زوايا المقطع الثانى على التوالي ومن ثمة ظهر ان الاضلاع
والزوايا من مقطعي كلم ه و ع ف ص ه و صارت متساوية على
التناظر و ثبت المطلوب من أن يكونا متساويين

نتيجة كافة المقاطع التى أنشئت موازية لقاعدة المنشور تكون مساوية لها
(الدعوى الثامنة النظرية)

(شكل ٢٠٨) المنشوران المثلثيان المتماثلان ا س د ه و و س د و ر ع
الركب منهما اى متوازي السطوح ا د هما متكافيان

فاذا رسم مستويا س ا د ه و وه ه ع ر من رأسى س و د عمادا على ضلع س و
ذاتهما ا ه و د ه و ح ر الثلاثة من المنشور المرقوم بنقط ا و د و ح
فى أحد طرفيه و بنقط ه و ع و ر فى طرفه الآخر حيث ان مقطعي س ا د ه و
و ه ه ع ر عمادا على مستقيم واحد يكونان متوازيين وبما صرح به فى الدعوى

التى تقدمت يكونان متساويين وان ا س و د ه ضلعي أحدهما المتقابلين
فصلا مشتركان بين مستويي ا س د ه و د ه و ع ر المتوازيين وبين المستوي
الاخر فيكون كل واحد من المقطعين متوازي الاضلاع وكذا يثبت ان يكون
شكل س ا ه و متوازي الاضلاع ولتوازي اضلاع وجوه س و ر ع و د ه و ع ر

و ا د ه و المنطرفة الاخر من جسم س ا د ه و وه ه ع ر يكون منشورا
(ح د ٤) وقائم الارتفاع ضلع س و د عمادا على قاعدتيه * فاذا قسم منشور

س ع القائم بمستوي س و د الى منشورين مثلثين قائمين ا س د ه و ع
و د ه و ع ر فالمنشور المثلثي ا س د ه و ع المائل يكافئ منشور ا س د ه و ع

المثلثي القائم و حيث ان قسم ا س د ه و مشترك بينهما فبما ثبت ان
التساوى بين القسمين الاخرين اعنى س ا د ه و وه ه ع ر فاقول

حيث ان وجهي $اوه$ و $أسوه$ متوازي الاضلاع وتساوي كل من ضاعي $اه$ و $اه$ بضع $رو$ الموازي لهما فيكونان متساويين فاذا طرح منهما $اه$ المشترك بقي $أا = هه$ وبمثل $هه$ يثبت ان يكون $دو = حح$ وان تصور تطابق جسمي $اأدو$ و $وههح$ بان تأتى قاعدة $وهح$ على مساويتها $أد$ فتقع نقطة $هه$ على نقطة $أ$ ونقطة $ح$ على $د$ وضلعا $هه$ و $حح$ على مساوييهما $أا$ و $دو$ * لان هذه الاضلاع عماد على مستوي $أد$ نفسه فعلى هذا ينطبق الجسمان المرقومان اتحادا ومنشور $اوههح$ المائل يكافئ منشور $أدوهح$ القائم

واما اثبات تكافئ منشوري $دووهح$ و $دووهح$ القائم والمائل فكاد كر واما المنشوران القائمان $أدوهح$ و $دووهح$ فتساويان لتساوي قاعدتيهما $أدو$ و $دو$ حيث انهم انصاف متوازي اضلاع واحد ولاشتراك ارتفاع $دو$ بينهما (نتيجة ٣) فيلزم من مكافئة منشوري $اوههح$ و $دووهح$ المثلثين للمنشورين المتساويين ان يكونا متقاومين ويثبت المطلوب نتيجة كل منشور $اوههح$ هو المثلثي المنشأ على زاوية $ا$ المجسمة وعلى حروف $اوه$ والمضاعة من متوازي السطوح $اد$ يكون نصفه

* (الدعوى التاسعة النظرية) *

(شكل ٢٠٩) اذا كان متوازي السطوح $ار$ و $ال$ على قاعدة $اوه$ المشتركة وكانت قاعدتهما العليا $هوه$ و $طكلم$ في مستوي واحد ومختصرتين بين خطي $هك$ و $حل$ المتوازيين فذا انك الجسمان يكونان متكافئين * وهي على ثلاثة احوال الاول اما ان يكون خط $هط$ أكبر من خط $هو$ او مساويا له أو أصغر منه وبرهان الكل واحد

اولا منشور $اهطدو$ المثلثي مساو لمنشور $روكدرل$ المثلثي * لان خط $اه$ مساو لخط $رو$ وخط $هه$ مساو لخط $رو$ وزاوية $اهط = رو$ وزاوية $ح هط = رو$ وزاوية $هها = رور$ فالثلاثة الاول

من هذه السمة المسطحة تصور زاوية هـ المجسمة والثلاثة الاخر تصور زاوية
و المجسمة الاخرى وهما متساويتان حيث تشكلتان من مستويات متناظرة
متساوية تشابهت أوضاعها * فاذا توهم تطبيق منشور ا هـ م على منشور
رول ووضع قاعدة ا هـ ط على قاعدة روك فهاتان القاعدتان ينطبقان
لما بينهما من التساوي ولوقوع ضلع هـ ج على مساويه ور لتساوي مجسمتي
هو و ينطبق أحدهما المنشورين على الاخر في جميع الامتداد ولا حاجة لبرهان
غير هذا * لانه كما تبين منشور ا هـ م بقاعدة ا هـ ط وحرف هـ ج أيضا
يتعين منشور رول بقاعدة روك وحرف ور (٣) فلذا يثبت تساوي
المنشورين فاذا طرح من جسم الـ منشور ا هـ م يبقى متوازي السطوح
ا ط ل وان طرح منه منشور رول يبقى متوازي السطوح ا هـ ر ومن
أجل ذلك تبين التكافؤ بين الجسمين ا ط ل و ا هـ ر متوازي السطوح
وثبت المطلوب

* (الدعوى العاشرة النظرية) *

الاجسام المتوازية السطوح المتحدة القاعدة والارتفاع تكون مكافئة
(شكل ٢١٠) مثلاً اذا كانت قاعدة ا ر حـ مشتركة بين متوازي السطوح
ا ر و لـ فلا اتحاد الارتفاع فيهما تكون قواعدهما العليا هـ و ر حـ وطـ لـ م
على مستوي واحد فبالتالي أن يكون ضلعا هـ و و ا ر متوازيين ومتساويين
وكذا ضلعا طـ لـ و لـ م فيصير خط هـ و موازياً لخط طـ لـ ومساوياً له
وبمثل هذا يثبت التوازي والتساوي بين خطي ر و و لـ فاذا امتد ضلعا
هـ و و ر حـ وضلعا لـ م وطـ م على الاستقامة حتى يحدث بالتقابل وتقاطعهم
متوازي الاضلاع هـ ج ر ك يكون مساوياً لكل من قاعدتي هـ و ر حـ
وطـ لـ م كما لا يخفى فاذا تصور متوازي سطوح ثالث آخر وقاعدته السفلى
ا ر حـ والعليا هـ ج ر ك فهذا الجسم المتصور يكافئ متوازي السطوح
ا ر (٩) لاتحاد قاعدتيهما السفليتين واستواء قاعدتيهما العلويتين على مستوي
واحد ومحورتين بين خطي ر ك و و لـ المتوازيين وبمثل هذا يثبت تكافؤ

متوازي السطوح الثالث المرفوع لمتوازي السطوح ال ومن ثمة تبين
تكايف متوازي السطوح ادوال وثبت المطلوب

(الدعوى الحادية عشرة النظرية)

كل متوازي السطوح يمكن تحويله الى متوازي المستطيلات المكافئ له الذي
ارتفاعه عين ارتفاعه وقاعدته مقاومة لقاعدته

(شكل ٢١٠) اذا فرض ان كثير السطوح المقروض ار ورسم متوازي
السطوح ال باقامة عماد اط وسع و دل و دم على مستوى القاعدة
من نقط او س و ح و ه مقاومة لمتوازي السطوح ار تكون وجوه و دل
الخ اطراف متوازي السطوح المرسوم مستطيلة فان كانت قاعدته ار ح د
مستطيلة صار جسم ال متوازي المستطيلات مكافئ لمتوازي السطوح
المقروض ار هذا * وان لم تكن قاعدة ار ح د مستطيلة

(شكل ٢١١) فاقول اذا انزل عمودا او و سه على ه و وأخرج عمودا
وك و ه سه على القاعدة فجسم ار ح د و ط سه ك الحادث يكون متوازي
المستطيلات * لان قاعدتيه ار ح د و ط سه ك المتقابلتين مستطيلتان
متساويتان وحيث ان اط و وك الخ حروف الوجوه المتطرفة عماد على
مستوى القاعدة تحققت استقامة الوجوه وثبت ان يكون جسم اسه متوازي
المستطيلات وامكانت لمتوازي السطوح ال لاتحاد قاعدة ار ط
وارتفاع او فيهما (١٠) ومن قبل قد تحول متوازي السطوح ار الى متوازي
السطوح ال مكافئاً ثم تحول الى متوازي المستطيلات اسه الذي قاعدته
ار ح د مقاومة لقاعدة ار ح د وارتفاعه اط عين ارتفاعه ومن ثمة ثبت
المطلوب من امكان تحويل متوازي السطوح الى جسم متوازي المستطيلات
المكافئ له

(الدعوى الثانية عشرة النظرية)

(شكل ٢١٢) متوازي السطوح ادوال الواقعان على نفس قاعدة ار ح د

النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعيهما أه واط
أولاً إذا فرض أن نسبة الارتفاعين كنسبة عدد ١٥ الى عدد ٨ فيقتد
ينقسم ارتفاع أه الى خمسة عشر جزءاً متساوية بحيثوى ارتفاع اط على
ثمانية منها فإذا امر بمستويات موازية للقاعدة من نقاط التقسيم و ص و د
الخ فهذه المستويات تقسم جسم ار الى خمسة عشر عدداً متوازي السطوح
وهي متساوية لتساوى قاعدتها والارتفاع فتساوى القواعد ظاهراً لما ذكرنا
المقاطع مثل م ط كل الموازية للقاعدة في منشور تكون متساوية (٧) وأما
تساوى الارتفاع فتساوى أ ب و ص و د أقسام الارتفاع فلذا
تساوت متوازية السطوح الخمسة عشر ومتوازي السطوح الـ ٨ يحتوى
على ثمانية منها ومن ثمة كانت نسبة جسم ار الى جسم ال كنسبة عدد
١٥ الى عدد ٨ أو كنسبة ارتفاع أه الى ارتفاع اط

الصورة الثانية وإن لم يحتو ارتفاعاً أه واط على عدد صحيح فلا تزال أيضاً نسبة
جسم ار : جسم ال :: أه : اط هذا * فان قيل إن ذلك التناسب
ليس بمطلوب وفرض كون نسبة ار : ال :: أه : اع فينقسم خط أه
الى أقسام متساوية يكون كل واحد منها أصغر من مقدار ط ع فاقبل ما يقع
من نقاط التقسيم بين ط و ع نقطة س فاذا سمى متوازي السطوح الذى
قاعدته اس د و ارتفاعه اس ه * ف * ومن كون النسبة بين ارتفاعي
أه و اس كنسبة بين العددين الصحيحين تكون نسبة جسم ار الى جسم
ف كنسبة أه الى اس وقد زعم أن جسم ار : ال :: أه : اع
فيصدر عنهما هذا التناسب وهو ال : ف :: اع : اس وإذا لزم أن
يكون جسم ال أكبر من جسم ف حيث أن مقدار اع أكبر من مقدار
اسه والحق بخلافه لانه أصغر * ومن ثمة امتنع أن يكون الحد الرابع
من هذا التناسب أع فى جسم ار : جسم ال :: أه : س أكبر من
مقدار اط وبمثل هذا امتنع أن يكون أصغر منه بل يساويه وثبت المطلوب
من أن تكون النسبة بين متوازي السطوح متحدى القواعد بأى حال كانت

كالنسبة بين ارتفاعيها

• (الدعوى الثالثة عشرة النظرية) •

(شكل ٢١٣) متوازي المستطيلات ابراق منحد الارتفاع هذا تكون

النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما $a-d$ و $a+d$

فعلى ما يرى من هذا الشكل اذا وضع أحدهما فى جانب الآخر وامتد مستوي

عہدہ لاء حق پلائی مسنوی درجہ فی فک بحث متوازی

المستطيلات ac وبه يمكن تقدير كل واحد من متوازي المستطيلات ar

فأقول لاتحاد القاعدة أهدى في جسمي أدراك كانت النسبة بينهما

كالنسبة بين ارتفاعيها a, a' وأيضاً لاتحاد قاعدة a له في جسمي

أك و أن كانت النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعيهما أي و أم فلذا

صار جسم ار : جسم اک :: ار : اع وجسم اک : جسم

ان :: اء : ام فاذا ضربت حدود هذين التناسلين بالترتيب وحذف

جسم اك المشترك في الحاصل تكون نسبة جسم ا د : ان :: ا ب

× اء : اغ × ام وحيثان إء × اء عنوان لقاءء اء اء

واع \times ام عنوان لقاعدة ام 5ع ثبت المطلوب من ان تكون النسبة

Երևան

*** (الدعوى الرابعة عشرة النظرية) ***

أى متوازي المستطيلات تكون النسبة بينهما كالنسبة بين حاصليهما الحادثين

من ضرب قاعدة كل في ارتفاعه أو من ضرب الابعاد الثلاثة في كل منهما

(شكل ٢١٣) اذا وضع احد جسمي A و B متوازيي المستطيلات في جنـب

الآخر بان تكون زاوية - ا هـ مشتركة في وجه الجسمين ثم يقدم ما يلزم اخراجه

من المستويات ويرسم متوازي المستطيلات ان الثالث بان يكون ارتفاعه

مساوی الارتفاع متوازی المستطيلات او

فأقول على ما صرح به في الدعوى السابقة بكون جسم أر : أن :: أرء

: أم د ع ولا اتحاد قاعدة أم د ع في متوازي المستطيلات ان و اسه
 كانت النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعي اه و اصه اعني ان جسم
 ان : جسمي اسه :: اه : اصه فاذا ضربت خدود هذين التناسيلين
 بالترتيب وحذف المضروب فيه المشترك وهو جسم ان يكون جسم اد :
 جسم اسه :: ا د ح د × اه : ام د ع × اصه فاذا وضع ا د
 × ا د و ا ع × ام عنوان كل من القاعدتين مقامهما كان جسم اد
 : جسم اسه :: ا د × ا د × اه : ا ع × ام × اصه ومن
 ذلك ثبت المطلوب من ان تكون النسبة بين متوازي المستطيلات كالنسبة
 بين حاصل ضرب قاعدة كل في ارتفاعه أو ضرب الابعاد الثلاثة من كل منهما
 تنبيه لاجل اخذ مساحة متوازي المستطيلات وقياسه يمكن ان يؤخذ حاصل
 ضرب قاعدته في ارتفاعه او حاصل ضرب ابعاده الثلاثة لما استبان من اثبات
 هذه الدعوى وتلك الطريقة صار يؤخذ بها مساحة كافة الاجسام ولا دلالة
 هذه المساحة كما ينبغي يقال ان المراد من حاصل ضرب خطين أو أكثر هو حاصل
 ضرب الاعداد الحسائية التي تقوم مقام تلك الخطوط وحيث ان هذه الاعداد
 توافق الاحد الخطي في كل حال أمكن ان تؤخذ بعضها اتفق فاذا كان الامر
 كما ذكره لم ان الاعداد الحاصلة من ضرب الابعاد الثلاثة من أي متوازي
 المستطيلات لا تنقيد شيئا واحدا حيث لو قيست تلك الخطوط بالاحد الخطي
 غير الذي تقدم يظهر وقوع الخلاف بين ما يحصل من العدد وبين ما تقدم واما
 اذا قيس متوازي المستطيلات الاخر بالاحد الخطي الذي قيس به الاول
 وضربت الابعاد الثلاثة منه في بعضها فحينئذ تكون نسبة الحاصلين كنسبة
 الجسمين ويحصل من الحواصل الصادرة عن الاعداد كما ذكر صور تجري مجرى
 اجسامها فتأمل

بحر الجسم هو مساحته التي جعلت له منشأ وتسمى المساحة الجسمية بالجملة وهو
 ما حازه الجسم من الفراغ واستعملت علماء المساحة الجسم حيث يقال المساحة
 الجسمية لمتوازي المستطيلات واختصار الالافاد يقال جسمه اعني حاصل ضرب

قاعده في ارتفاعه

اعلم ان المراد من الجسم الذي يذكر في أصول الهندسة هو الجسم التعليمي الذي لا يبحث فيه عن كنهه ولا عن اجزائه المادية بل يبحث فيه عن امتداداته أي بعداده الثلاثة ويسمى البحث في الجسم من حيث انه جسم لامن حيث ادراكه الممكنه لان ذلك يتعلق بعلم الطبيعة كما لا يخفى

حيث ان اضلاع المكعب الثلاثة متساوية فان كان ضلعه واحدا فحجمه $1 \times 1 \times 1$ يعني ١ وان كان اثنين فحجمه $2 \times 2 \times 2$ يعني ٨ وان كان ثمانية فحجمه $8 \times 8 \times 8$ يعني ٥١٢ الخ فان كانت اضلاع المكعب ١ و ٢ و ٣ الخ فتكون مكعباتها اجسامها ١ و ٨ و ٢٧ الخ ومن هذا قد بين في علم الحساب ان مكعب العدد هو ضرب ثلاثة اضعافه في بعضها وان بدلت ان يريد اعمال مكعب ضعف مكعب معلوم فيلزم استخراجها بان تكون نسبة ضلع المكعب المطلوب الى ضلع المعلوم كنسبة جذور مكعب عدد ٢ الى واحد وان تيسر جذور مربع عدد ٢ بعجلات الهندسة ولكن الى الان وجود جذور مكعب عدد اثنين بطريق اصول الهندسة بواسطة الدوائر التي علمت اقطارها واما كرها وان خطوط المستقيمة المعينة بمجراد ادراكه نقطتي حدودها فمتع ومن اجل ذلك قد اشتهر امتناع اعمال مكعب مساو اضعف مكعب آخر بطريق عمليات الهندسة كما اشتهرت مسألة تثليث الزاوية بين المهندسين المتقدمين لكن مثل هذه المسائل قد بين حلها بطريق آخر وان كان حل ما وجد منها ليس سهلا كطريق الهندسة لكن لا فرق بين الطريقتين في عنوان الصفة

اعلم ان تثليث الزاوية اعني تقسيمها الى ثلاثة اقسام متساوية على طريق اصول الهندسة غير ممكن عند المهندسين المتقدمين وعدت بينهم من المشكلات التي تحتاج الى حل وكذا اجتهد في حلها المهندسون المتأخرون فلم يمكن بطريق اصول الهندسة الجارية ولكن قد بين حلها بطريق الهندسة العليا اعني علم تطبيق الجبر على الهندسة و بطريق انشاء القطع المسكني واما ما ذكره الخليفة الاول بالهندسة فانه التي بالتسطة عظيمة المشهورة بالاسلام بول مصدريه حتى زاده حسين

افندي في رسالة بخصوص تثليث الزاوية بطريق الهندسة فانه باطل لا يعمل به
حيث لم يثبت له صحة وجوب الفائدة في وجودها بطريق الهندسة ~~التي~~ كونه من
قبيل تحصيل ما هو حاصل قد سقطت تلك المسئلة من درجة الالفات بين علماء
الهندسة

(الدعوى الخامسة عشرة النظرية)

جسم متوازي السطوح وعموما كل جسم منشور مساو لحاصل ضرب قاعدته
في ارتفاعه

اولا لان متوازي السطوح مكافئ لمتوازي المستطيلات الذي قاعدته عين
قاعدته وارتفاعه كذلك (١١) فبين ان جسم متوازي السطوح مساو لحاصل
ضرب قاعدته في ارتفاعه حيث ان جسم متوازي المستطيلات كذلك
ثانيا كل منشور مثلثي يكون نصف المنشور الذي انشئ وقاعدته ضعف قاعدته
وارتفاعه عين ارتفاعه فبين ان جسم المنشور المثلثي مساو لحاصل ضرب
قاعدته في ارتفاعه حيث ان جسم متوازي السطوح مضاعفه مساو لحاصل
ضرب ضعف تلك القاعدة في ذلك الارتفاع

ثالثا ان كل منشور جسمه مساو لحاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه حيث يمكن
تقسيمه الى منشورات مبنية متحدة الارتفاع بعدد المثلثات التي احتوت عليها
قاعدته وجسم كل منها مساو لحاصل ضرب قاعدته الجزئية في الارتفاع المشترك
فكان مجموع المنشورات مساو لحاصل ضرب مجموع المثلثات التي اتخذت
قواعد في الارتفاع المشترك فصارت مساحة اي منشور تساوي حاصل ضرب
قاعدته في ارتفاعه وثبت المطلوب

نتيجة المنشوران المتحد الارتفاع النسبة بينهما كالنسبة بين حواصل ضرب
القواعد في الارتفاع او كنسبة القاعدتين حيث ان قواعد المنشورات المتحدة
الارتفاع تجري مجرى اجسامها وايضا اذا اتحدت القاعدتين المنشورات
فالنسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعاتها

(الدعوى السادسة عشرة الفائدة)

(شكل ٢١٤) اذا قطع اهرام سه ا ح د ه بسمتوى ووط الموازى لقاعدته
اولا تنقسم اضلاع سه ا و سه ر و سه ح الخ وارتفاع سه ح في نقط
د و و ح الخ و سه على التناسب
ثانياً تقطع و د ح ط ب بصرته ك ل المستقيم الاضلاع يشابه قاعدة
ا ح د ه

اولاً لتوازي مستويي ا ح د و و د ح يكون فصلاهما المشترك ا ر و و د
بسمتوى سه ا الثالث متوازيين (١٠ مقالة ٥) ومن اجل ذلك تشابه مثلثا
سه ا و سه د و به ظهروا تناسبا سه ا : سه د :: سه ر : سه د وايضا
سه ر : سه د :: سه ح : سه ح وكذا البواقي فلذا انقسمت اضلاع
سه ا و سه ر و سه ح الخ في نقط د و و د ح على التناسب وانقسم ايضا ارتفاع
سه ح في نقطة سه على التناسب
لانه يلزم من توازي ر ع و سه ظهور هذا التناسب سه ح : سه سه ::
سه ر : سه د

ثانياً لتوازي و د بخط ا ر و خط د ح بخط ر ح و خط ح ط بخط د ح الخ
تكون زاوية و د ح = زاوية ا ر ح وزاوية د ح ط = زاوية ر ح د
وكذا باقي الزوايا

وماعدا هذا فلشابه مثلثي سه ا و سه د تكون ا ر : و د :: سه ر :
سه د وايضا لتشابه مثلثي سه ر و سه د ح صارت سه ر : سه د ::
سه ح : د ح و لتساوى النسب فيهما كانت ا ر : و د :: ر ح :
و د وايضا ر ح : د ح :: د ح : ح ط وهلم جرا وحيث تشابهت
الاضلاع وتساوت الزوايا المتناظرة من شكلي ا ح د ه و و د ح ط المستقيمي
الاضلاع فقد تشابهما

نتيجة اذا اشترك رأسا اهرامى سه ا ح د ه و سه ك ل م واتحد فيهما
الارتفاع أو كانت قاعدتاها موضوعتين على مستوي واحد وقطع هذان
الاهرامان بمستويين للقاعدة فيجذب مقطعا و د ح ط و د ح غ ف فيكون

النسبة بينهما كانت نسبة بين قاعدتي $ا ر د ه و$ و $ك ل م$ لان تشابه $ا ر د ه و$
 و $و ر ح ط$ يقتضى ان تكون نسبة سطحين - ما كنسبة مربعي ضلعيهما
 المناظرين $ا ر و ر$ و تناسب مقادير $ا - ر : و ر :: س ا : س و$
 الاربع ومربعاتها يصير $ا ر د ه و : و ر ح ط :: س ا : س و$
 وبمثل هذا يثبت ان تكون $ك ل م : و ر ح ط :: س ك : س و$ ومن
 كون $و ر ح ط$ مستويا واحدا يكون $س ا : س و :: س ك :$
 $س و$ فيكون $ا ر د ه و : و ر ح ط :: ك ل م : و ر ح ط$ وحيث
 ان النسبة بين مقطعي $و ر ح ط$ و $و ر ح ط$ كالنسبة بين قاعدتي $ا ر د ه و$
 و $ك ل م$ فاذا تكافأت القواعد تكافأت المقاطع المنشأة بالارتفاع الواحد
 * (الدعوى السابعة عشرة النظرية) *

اذا تقاومت القاعدة وتساوى الارتفاع من هرمين تكافأتا

(شكل ٢١٥) اذا كانت قاعدتا $ا ر د ه و$ و $ا ر ح ط$ في هرمي $س ا ر ح و$
 $س ب ا ر ح ط$ متقاومتين وموضوعتين على مستوي واحد واشتركت فيهما الارتفاع $ا ب$
 فالهرمان المرقومان متكافئان * وان لم يتكافئا كان المنشوران المنشأ بالارتفاع
 اصغر على قاعدة $ا ر ح ط$ تفاضلا بينهما بان يكون هرم $س ب ا ر ح ط$ هو الاصغر
 فاذا انقسم ارتفاع $ا ب$ المشترك الى اقسام متساوية يكون احدها اصغر من
 ارتفاع $ا ب$ ويفرض $ن$ ومربعين $ن$ توازي القاعدة من نقط التقسيم
 فالمقاطع المتأداة في الهرمين بتلك السطوح تكون متساوية يعني يكون مقطع
 $د ه و = د ه و$ و $ر ح ط = ر ح ط$ الخ (نتيجة ١٦) فاذا علمت ما ذكرنا
 واتخذت مثلثات $ا ر د ه و$ و $ا ر ح ط$ الخ قواعد $ا ر و ر$ و $ا ر ح ط$ الخ اقسام
 ضلع $س ا$ حروفا وان شئت منشورات خارجية وايضا مثلثات $د ه و$ و $ر ح ط$
 و $ك ل م$ الخ قواعد واقسام ضلع $ا س$ حروفا وان شئت بها منشورات داخلية
 فالارتفاع $ن$ يكون ارتفاعا مشتركا لكافئتها وحيث ان مجموع المنشورات

الخارجة اكبر من هرمها $سـ اـ د$ ومجموع المنشورات الداخلية اصغر
من هرمها $سـ هـ اـ د$ لزم ان يكون الفرق بين المجموعين من المنشورات أكبر
من التفاضل بين الهرمين المرقومين

ناقول ابداً من جهة قاعدة $اـ د$ و $اـ هـ$ ان المنشور الخارج الثاني
دهود من الهرم الاول يكافئ المنشور الاول الداخل كدهو من الهرم
البنائي تكافئ قاعدة $د هـ و$ كدهو فيما واتحاد ارتفاع $د$ بينهما وبمثله
تكافئ منشور $د ح ط$ ك الثالث الخارج بمنشور $د ح ط$ الثاني الداخلي
وكذا الرابع الخارج والبنائي الداخلي تكافئان وهلم جرا حتى الاخير فعلم من
هذا ان مجموع المنشورات الخارجة من هرم $سـ اـ د$ غلب منشور $اـ د$
الاول مساو مجموع المنشورات الداخلية من هرم $سـ اـ هـ$ فكان
منشور $اـ د$ هو التفاضل بين المجموعين من منشورات كل من هرمي
 $سـ اـ د$ و $سـ اـ هـ$ وقد ثبت آتفا ان الفرق بينهما أكبر من الفرق بين
الهرمين المرقومين واذا كان منشور $اـ د$ أكبر من منشور $اـ هـ$ صه
المشابه ارتفاع $اـ هـ$ وليس كذلك بل بالعكس لان ارتفاع $اـ هـ$ أكبر من
ارتفاع $د$ مع اتحاد قاعدة $اـ د$ فيهما فلا جرم ان يكون منشور $اـ د$ صه
أكبر من منشور $اـ هـ$ وهذا آكد دليل على بطلان ما فرض وثبت المطلوب
من انه متى تقاومت القواعد واتحد الارتفاع في هرمي $سـ اـ د$ و $سـ اـ هـ$
يكونان متكافئين

• (الدعوى الثامنة عشرة النظرية) •

كل هرم مثلثي ثلث المنشور المثلثي اذا اتحد مع القاعدة والارتفاع
(شكل ٢١٦) اي اذا كان $سـ اـ د$ هرمامثلثيا و $اـ د هـ$ منشورا
مثلثيا واتحد القاعدة وارتفاعا فالهرم ثلث المنشور
فاذا طرح هرم $سـ اـ د$ من المنشور يبقى جسم $سـ اـ د هـ$ هرمارباعيا

قاعدته ا ح د ه ورأسه س فاذا وصل قطر ح ه وهو بمستوى س ه ه
 ينقسم ذلك الهرم الى هرمين مثلثين ارتفاعهما هو العمود المشترك النازل من
 رأس س ه على مستوى ا ح د ه وقاعدتهما مثلثا ا ح ه و د ح ه اللذان
 هما نصفاه متوازي الاضلاع ا ح د ه ولتساويهما كان هرما س ه ا ح ه
 و س ه د ح ه المرقومان متقاومين لكن هرما س ه د ح ه و س ه ا ح ه قاعدتهما
 ا ح ه و د ح ه س ه متساويتان والارتفاع واحد حيث انه البعد الحقيقي بين
 مستويي ا ح ه و د ح ه س ه المتوازيين فوجب التكافؤ بينهما وقد ثبت آنفا
 ان هرما س ه د ح ه بقاوم هرما س ه ا ح ه فلذا كانت الاهرام الثلاث
 س ه ا ح ه و س ه د ح ه و س ه ا ح ه التي تتركب منها منشور ا س د ه ومن ثمة
 ثبت المطلوب وهو ان يكون هرما س ه ا ح ه ثلث المنشور الذي اتحد به قاعدة
 وارتفاعا

(نتيجة) مساحة اى هرم تساوى ثلث حاصل ضرب قاعدته في الارتفاع

(الدعوى التاسعة عشرة النظرية)

(شكل ٢١٤) كل هرم نحو س ه ا ح د ه ثلث حاصل ضرب قاعدته

ا ح د ه في ارتفاعه س ه ع يساوى مساحته الجسمية

لانه اذا مر من قطري القاعدة ه س ه بمستوي س ه ر و س ه د

ينقسم هرما س ه ا ح د ه الكثير السطوح الى اهرام مثلثية متعددة

يكون س ه ع ارتفاعا مشتركا فيها والمساحة الجسمية من كل تساوى حاصل

ضرب كل من قواعد ا س ه و د ح ه و د ح ه في ثلث ارتفاع س ه ع كمنطوق

السابقة فكان مجموع مساحة الاهرام المثلثية أو الهرم الكثير السطوح

المرقوم مساويا لحاصل ضرب مثلثات ا س ه و د ح ه و د ح ه أو كثيرا الاضلاع

ا ح د ه في ثلث الارتفاع اعني $\frac{1}{3}$ س ه ع ومن ثمة ظهر ان المساحة الجسمية

من كل هرما تساوى حاصل ضرب قاعدته في ثلث ارتفاعه ويجوز العكس

واخذ ثلث الحاصل

(نتيجة ١) كل هرم ثلث المنشور المتحد به قاعدة وارتفاعا

(نتيجة ٢) النسبة بين الهرمين المتحدى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما والمتحدى القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما

* (تنبيه) * كل جسم كثير السطوح يمكن تقديره بتحليل جسماته الى اهرام واهذا التحليل وجوه شتى أهونها امرار المستويات التي تقسم الجسم من زاوية بحسبة واحدة وحيثما ينقسم الجسم الكثير السطوح الى اهرام جزئية بعدد ماله من الوجوه سوى التي تحيط بالزاوية المحسبة فتأمل

* (الدعوى العشرون النظرية) *

كثير السطوح المتماثلان متقاومان

(شكل ٢٠٢) نقول اولان مساحتي هرمي سـ اـ حـ و طـ اـ حـ المتماثلين تكونان متساويتين حيث كان ثلث حاصل ضرب قاعدة اـ حـ في ارتفاع سـ حـ أو مـ مقدار مشترك فيهما

وثانيا كما ينقسم احد كثيرى السطوح الى اهرام مثلثية فالآخر كذلك ينقسم الى اهرام مثلثية مقاومة ومناظرة للاول فعلم ان كثيرى السطوح المتماثلين يكونان متقاومين

تنبيه على ما صرح به في الدعوى الثانية من ان كثيرى السطوح المتماثلين كما يتركب أحدهما من اجزاء يتركب الآخر كذلك من اجزاء تساوي ما في الاول وهذه الدعوى عين الثانية وانما كررت تأكيدها للبرهان

* (الدعوى الحادية والعشرون النظرية) *

اذا قطع الهرم بمستوي يوازي قاعدته و طرح الهرم الذي فوق المستوى القاطع فالهرم الناقص اعني ما تحت المستوى المرقوم مساحته تساوي مجموع ثلاثة اهرام يشترك في الارتفاع الهرم الناقص وقواعدها الثلاث العليا منه والسفلى وما كانت بينهما اوسطا متناسبا

(شكل ٢١٧) مثلا اذا كان سـ اـ حـ دـ هـ هـ ما قطع بمستوى اـ دـ موازيا لقاعدته وكان مـ و رـ حـ هـ ما مثلثا يكاثفه قاعدة وارتفاعا فحيث لا مانع ان تكون القواعد منه على مستوى واحد فاذا امتد مستوى اـ دـ

يعين مقطع و د ح في الهرم المثلثي فيكون ارتفاع المقطعين عن مستوي
القاعدتين واجدا فتكون النسبة بين مقطعي و د ح و أ د كالنسبة
بين قاعدتي و د ح و أ د وبكافتي القاعدتين يتكافأ المقطعان ويكون هرما
سه أ س ح د ه و م و د ح متكافئين لاتحاد القاعدة والارتفاع فيهما وحيث
ثبت تكافؤ الهرمين الكليين فالباقيان اعني الهرمين الناقصين متكافئان
فحسبك مايجري من العمل على الهرم الناقص المثلثي كله اجري على الاول لما
بينهما من التكافؤ

(شكل ٢١٨) فاذا كان و د ح و د هرما ناقصا توازت قاعدتاها ومربعا مستوي
و د ح من ثلاث نقط و و د و ح ينفصل به من الجسم الاصلي هرم و د ح
المثلثي وقاعدته هي السفلى من جسم و د ح و د المقروض وارتفاعه
ارتفاعه حيث كانت رأس د نقطة من مستوي قاعدة و د ح العليا فيبقى
من الجسم المرقوم هرم و د ح و رباعي رأسه د وقاعدته شكل و د ح و
فاذا مر بمستوي و د ح من نقط و د و ح الثلاث يتقسم ذلك الهرم الرباعي
الى هرمي و د و ح و و د و ح الثلاثين الاخير منها قاعدته و د ح العليا
من الجسم وارتفاعه عين ارتفاع الجسم حيث كانت رأسه ح نقطة من مستوي
السفلى منه وبهذا علم من الثلاث اهرام التي تركب منها الهرم الناقص اثنان وبقي
هرم و د و ح الثالث المراد العلم به

فيرسم د ك موازيا لخط و و ويتصور هرم و و ح ك جديد تكون قاعدته
و و ح * ورأسه ك فهذا الهرم ان تحدف فيه ما قاعده و و ح وكذلك
الارتفاع * لوقوع كل من رأسه د و ك على خط د ك الموازي لخط و و
ولمستوي القاعدة فظهر التكافؤ بين الهرمين باتحادهما قاعدة وارتفاعا لكان
اذا جعلت و رأس الهرم و و ك ح لاجرم ان ارتفاعه هو ارتفاع الجسم
المقروض فاذا صيرت و ك ح قاعدة له فتكون وسطا متناسبا بين قاعدتي
و د ح و و د ح * لان في مثلثي و ح ك و و د ح زاوية و = د و

وضلع دك = وَرَقَةٌ كون و ح ك : وَرَقٌ :: و ح : و ح
 (مقالة ٣) وتكون أيضا و ح ر : و ح ك :: و ر : و ك أو و ر
 ولكن لتشابه مثلثي و ح و وَرَقٌ كانت و ر : و ر :: و ح : و ح
 ولتساوي النسب فيهما لزم أن تكون و ر ح : و ح ك :: و ح ك : وَرَقٌ
 فصارت قاعدة و ح ك وسطا متناسبا بين قاعدتي و ح و وَرَقٌ فبين
 أن يكون الهرم المثلثي الناقص المتوازي القاعدتين مساويا جسمه لثلاث أهرام
 يشترك فيها الارتفاع وقواعدها الثلاثة * العليانه والسفلى وثالث قاعدة لها
 مقدارها وسط متناسب بينهما

* (الدعوى الثانية والعشرون النظرية) *

(شكل ٢١٦) إذا قطع المنشور المثلثي الذي قاعدته ا - ح بمستوى د ه س
 غير مواز لها فاجسم الحادث ا - ح د ه س من ذلك مساو لمجموع ثلاثة أهرام
 اشتركت فيها قاعدته ا - ح ورؤسها د و ه و س
 فإذا مر بمستوى س ه ا من نقطتي و ا و ح انفصل عن المنشور المقطوع
 ا - ح د ه س هرم س ه ا - ح المثلثي الذي قاعدته ا - ح ورأسه س فيبقى
 هرم س ه ا د ه المربعي الذي قاعدته ا د ه * فإذا مر بمستوى
 س ه د من نقطتي و ه و ح انقسم ذلك الهرم المربعي الى هرمين مثلثيين
 س ه ا د ه و س ه د ه فهرم س ه ا د ه الذي قاعدته ا د ه ورأسه س
 يكافئ هرم ه ا - ح الذي قاعدته ا د ه ورأسه س لاتحاد القاعدتين
 والارتفاع * لان خط س ه مواز لكل من خطي ا ه و ح فيوازي
 مستويي ه ا د ه فثبت بينهما التساوي وهرم ه ا - ح قد تكون قاعدته
 ا - ح ورأسه ه واما هرم س ه د ه الثالث فيمكن تحويله الى هرم ا س ه د
 لتساويهما حيث اتحدت قاعدة س ه د ه فيهما وكذا الارتفاع وذلك لان خط
 ا ه مواز لمستوي س ه د ه ثم يتحول هرم ا س ه د ايضا الى هرم ا - ح د
 لوجود التساوي بينهما حيث اتحدت فيهما قاعدة ا د ه ولوقوع رؤسهما
 س و ه على خط مواز لمستوي القاعدة فكان س ه د ه و ا س ه د

و ا ح د الازهرام الثلاثة متكافئة وهرم ا ح د قد تكون قاعدته ا ح د
ورأسه د ومن اجل ذلك صارت المساحة الجسمية من منشور ا ح د ه س ه
المقطوع يساوي مجموع ثلاثة اهرام تشترك فيها قاعدة ا ح د ورؤسها د
و ه و س وثبت المطلوب

نتيجة اذا كانت حروف ا ه و س و د عمادا على مستوى القاعدة
فهى الارتفاعات للاهرام الثلاثة التى يتركب منها المنشور والمقطوع ووجهه
يساوى $\frac{1}{3} \text{ ا ح د} \times \text{ا ه} + \frac{1}{3} \text{ ا ح د} \times \text{س ه} + \frac{1}{3} \text{ ا ح د} \times \text{د ه}$
ح د ولاشك ان $\frac{1}{3} \text{ ا ح د}$ فى كل من المضروب تنحصر مساحته فى $\frac{1}{3} \text{ ا ح د} \times$
(ا ه + س ه + د ه)

* (الدعوى الثالثة والعشرون النظرية) *

الهرمان المتشابهان المتساويتان هما الزوايا المجسمة المتناظرة
وتشابهت فيهما الوجوه المتناظرة

(شكل ٢٠٣) على ما صرح به فى الحدود ويكون فى هرمى س ه ا ح د و ط د ه و
مثلا س ه ا و ا ح د من احدهما متشابهين لمتلى ط د ه و د ه و من الآخر
ولتشابه الوضع اعنى ان زاوية ا ر س ه = د ه ط وزاوية ر ا س ه = د ه ط
وزاوية ا ح د = د ه و وزاوية ر ا ح د = د ه و وما عدا هذا اذا كان
الميل والانحراف بين مستويى س ه ا و ا ح د مساويا للانحراف بين مستويى
ط د ه و د ه و فالهرمان المرقومان يتشابهان فاذا علمت ما ذكرنا تشابه منهما
كافة الوجوه المتناظرة وتنساوى فيهما الزوايا المجسمة المتناظرة * فاذا أخذ
ر د = ه د و ر ح = ه و و ر د = ه ط و وصل ر ح و د ه و د ه و ر د و ر ح
فهو ط د ه و الحادث يساوى هرم ر د ح لان ضلعي ر د و ر ح
اخذما مساويين لضلعي د ه و ه و وفرضت زاوية ر ح د مساوية لزاوية
د ه و فتساوى مثلثا ر د ح و د ه و

فلاجل اثبات المساواة بين هذين الهرمين اولاً نوضح قاعدة د ه و على
قاعدة ر ح المساوية لهما اجراء العمل التطبيقي وتنساوى الانحراف مستويى

ط ه و د ه و لما بين مستويي س ه ا و ا ر ح تين وقوع مستوى د ه ط
على مستوى ا ر س ه * ولكن حيث فرضت زاوية د ه ط مساوية لزاوية
ر ه ط يقع خط ه ط على مساوية ر ه فلذا تنطبق نقط د ه و و و ط
الاربعة بنقط ر و س و ح و ا و بلكل واحد وبذلك ظهر انطبق ه ر ي
ط ه و و ر ه ر ح ولكن لتساوي مثلثي د ه و و ر ه ر ح تكون زاوية
ر ح ه = د ه و = ر ا د وبذلك خط ر ح يوازي خط ا د و خط ر ه خط
ا س ه فيثبت مستوى ر ح يوازي مستوى س ه ا د (٣١ مقالة ٥) ومن ثمة
تتبين تشابه مثلث ر ح ه و مساوية ط د و بمثلث س ه ا د * ومثلث ر ه ر ح
أ و مساوية ط ه و بمثلث س ه ر د فلذا اتضح تشابه الوجوه الاربعة المتناظرة
من هرمي س ه ا د و ط ه و المثلثين وايضا الزوايا المجسمة المتناظرة
منهما مساوية * لانه قد تقدم تطبيق زاوية ه المجسمة على نظيرتها ر
وكذلك تجرى البواقي مجراهما ولا جرم ان ترى زاويتي ط و س المجسمتين
متساويتين حيث تركبتا من ثلاث الزوايا المسطحة المتساوية المتناظرة مع تشابه
الوضع ومن اجل ذلك ثبت المطلوب من ان تكون الوجوه المتناظرة من الهرمين
المثلثين المتشابهين متشابهة والزوايا المجسمة المتناظرة متساوية كما لا يخفى
(نتيجة ١) يصدر هذا التناسب من المثلثات المتشابهة في ذينك الهرمين يعني
ا ر : د ه :: ر ح : ه و :: ا د : د و :: ا س ه : د ط ::
س ه : ط ه :: س د : ط و فلذا علم وجود تناسب اضلاع الاهرام
المثلثية المتشابهة

(نتيجة ٢) لتساوي الزوايا المجسمة المتناظرة فكل ميسل بين وجهي احد
المتشابهين يساوي ما بين نظيريهما في الآخر

(نتيجة ٣) اذا قطع الهرم المثلثي بمستوي ر ه ح موازيا لاجد وجوه
بر ا د فهرم ر ه ح الجزئي يشابه هرم ا ر س ه الكلي وذلك لتشابه
مثلثي ر ه و و ر ح ل مثلثي س ه و و س ا د تناظرا ووضعاهما متشابه
ولتساوي الخراف مستويي احدهما هو نظيره في الآخر ثبت التشابه بين

المجسمة

(شكل ٢١٩) فإذا كلن شكل ا ر ح وه قاعدة كثير السطوح وتعينت رؤس الزاويتين المجسمتين م و و انما رجتين عن تلك القاعدة بهرى م ا ر و و ا ر ح المشتركين في قاعدة ا ر ح وكانت قاعدة ا ر ح وه من كثير السطوح الاخر شبيهة بقاعدة ا ر ح وه وتعينت م و و نظيرتا م و و بهرى م ا ر ح و ا ر ح نظيرى م ا ر ح و ا ر ح فيتناسب بعدا م و م و م ا ر ح و ا ر ح على التناظر لان الانحراف بين مستوي م ا ر ح و م ا ر ح يساوى الانحراف بين مستوي م ا ر ح و م ا ر ح بتشابه هرى م ا ر ح و م ا ر ح وايضا لوجود المشابهة بين هرى م ا ر ح و ا ر ح يكون انحراف مستوي م ا ر ح و م ا ر ح مساويا لانحراف مستوي م ا ر ح و م ا ر ح فان حذف ميل الاول من ميل الاخر يبق انحراف مستوي م ا ر ح وم ا ر ح مساويا لانحراف مستوي م ا ر ح و م ا ر ح لوقوع التشابه بين ذينك الهرمين فمثلا م ا ر ح يشابه م ا ر ح و حيث يشابه م ا ر ح م ا ر ح مثلا ف ا ر ح وقع التشابه بين الوجهين المتناظرين من هرى م ا ر ح و م ا ر ح المثلثين وتشابه الوضع وتساوى الانحراف فيهما فلهذا ظهر تشابه الهرمين المرقومين (٢١) واضلاعهما المتناظرة تعطى هذا التناسب حيث ان م و : م و :: ام : ام وكذا ام : ام :: ا ر : ا ر ولتساوى النسب كانت م و : م و :: ا ر : ا ر

واما اذا كانت ف و ف رأسين اخرين متناظرين من كثيرى السطوح المرقومين فتكون ايضا ف و : ف و :: ا ر : ا ر وكذا ف م : ف م :: ا ر : ا ر وحيث قد تكون م و : م و :: ف و : ف و :: ف م : ف م فلذا علم ان كل مثلث يحدث بمصائل ثلاث رؤس من احد كثيرى السطوح نحو ف و م يشابه مثلث ف و م المشكل من مصائل

الثلاث الرؤس الاخر المتناظرة للاول من الاخر

واذا كانت \angle و \angle رأسين متناظرين فيكون ايضا مثلث \angle \angle \angle مشابه للمثلث \angle \angle \angle فضلا عن ان يكون انحراف مستويي \angle \angle و \angle \angle مساويا لانحراف \angle \angle و \angle \angle الاخر * لانه اذا وصل \angle و \angle فوجد المشابهة بين مثلثي \angle \angle \angle و \angle \angle \angle فلذا زاوية \angle \angle مساوية لزاوية \angle \angle فاذا تصور تشكيل زاوية مجسمة في نقطة \angle من ثلاث زوايا مسطحة \angle \angle و \angle \angle و \angle \angle وفي نقطة \angle زاوية مجسمة اخرى بثلاث زوايا مسطحة \angle \angle و \angle \angle و \angle \angle وحيث ان هذه المسطحة متساوية بالتناظر وجب تساوي المجسمتين المرقومتين فلذا انحراف مستويي \angle \angle و \angle \angle يساوي انحراف مستويي \angle \angle و \angle \angle وان كانت مستويا \angle \angle و \angle \angle على مستوي واحد فحينئذ فيكون زاوية \angle \angle = \angle \angle + \angle \angle وايضا زاوية \angle \angle = \angle \angle + \angle \angle والمعنى ان مثلثي \angle \angle \angle و \angle \angle \angle يكونان على مستوي واحد فقط * مما صر الى هنا ان ما كانت عليه زوايا \angle و \angle و \angle من حال ما كان نظائرها \angle و \angle و \angle تكون مثلها وتجرى مجراها في كل الوجوه

الآن اذا فرض انقسام سطح احد كثيري السطوح الى مثلثات \angle \angle و \angle \angle و \angle \angle الخ فلا جرم ان سطح الاخر يحتوي على مثلثات مساوية لتلك المثلثات عددا ومساوية لها نحو \angle \angle و \angle \angle و \angle \angle الخ واذا كانت مثلثات \angle \angle و \angle \angle الخ المتعددة في مستوي واحد فنظائرها \angle \angle و \angle \angle الخ تكون كذلك

والحاصل ان كل وجه في كثير السطوح كان شكلا مستقيما الاضلاع اباما كان فنظيره في كثير السطوح يكون شكلا يشابهه وفيه قابلية مضاعف من هذا ان كثيري

السطوح المتشابهة تحاط بسطوح مستوية متشابهة هيئة ووضعها ومتساوية
عددا كما علم ولا خفاء فيه

وماعدا هذا فالزوايا الجسمة المتناظرة من كثيرى السطوح المرقومين تكون
متساوية * لانه كما اذا تصور تشكيل زاوية \angle الجسمة بزوايا \angle ف
و \angle م و \angle م و \angle م و \angle م المسطحة تتشكل نظيرتها \angle الاخرى بزوايا
 \angle ف و \angle ف و \angle م و \angle م و \angle م و \angle م المسطحة المشابهة لتلك الزوايا
ولوجود المساواة بين كل مستويين من انحراف في أحدهما المابين نظيريهما
في الآخر ثبت امكان التطابق كاملا بين كل مجسمتين متناظرتين وان كثيرا
السطوح المتشابهين تتساوى فيهما الزوايا الجسمة المتناظرة وتتشابه الوجوه
المتناظرة هيئة ووضعها والمطلوب

(تقيجة) على ما صرح به في الدعوى المتقدمة انه كما يتشكل هرم مثلثي من
اربع رؤس في كثير السطوح يتشكل من أربع رؤس نظائرهما في كثير السطوح
المشابهة هرم مثلثي آخر يشبه ما تقدم لتناسب اضلاعهما المتناظرة

(تبيه ٢١) وفي هذا يرى أن النسبة بين قطري \angle و \angle المتناظرين
كالنسبة بين ضلعي \angle و \angle على التناظر

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية)

كثير السطوح المتشابهان يمكن ان ينقسما الى اهرام متشابهة هيئة ووضعها
ومتساوية عددا

لانه قد ثبت ان كثيرا السطوح يمكن انقسام سطوحهما الى مثلثات متناظرة
متشابهة تشابهت أوضاعها واذا فرض ان جميع المثلثات التي تحيط بكثير
السطوح سوى ما أحاط بزوايا \angle الجسمة كقواعد فتشكون اهراما مثلثية
مجمعة في نقطة \angle المرقومة بعد تلك القواعد فجعله هذه الاهرام عبارة عن
جسم كثير السطوح فاذا انقسم الآخر الى اهرام مثلثية قد اجتمعت رؤسها
في نقطة \angle نظيرة \angle في الاول فكل هرم تشكل بوصلات الرؤس الاربع من

احدهما يشابه الهرم الذي تصوره بوسائل الرأس الاربع من كثير السطوح
الآخر كما عرفت ومن ثمة قد ظهر اثبات امكان تقسيم كثيرى السطوح المتشابهين
الى اهرام مثلثية متناظرة متشابهة قد تشابه وضعها وهو الظاهر
(الدعوى السادسة والعشرون النظرية)

النسبة بين الهرمين المتشابهين كالنسبة بين مكعبى ضلعيهما المتناظرين لانه اذا
تشابه الهرمان يمكن وضع الاصغر منهما فى الاكبر

(شكل ٢١٤) بان تكون زاوية α من المجسمة مشتركة فقاعدتا α و β و

و γ ط δ من المرقومين متوازيان لتشابه الوجوه المتناظرة منهما (٢٢)

فتكون زاوية α و β مساوية لزاوية α و β وايضا زاوية α و β زاوية

و γ بناء عليه مستوى α و β موازى لمستوى α و β (١٤ مقالة ٥) فاذا

كان الامر كما ذكر وكان خط α و β هو العمود النازل من رأس α و β على

مستوى α و β ونقطة α و β ملتقا العمود المرقوم بمستوى α و β فعلى

ما صرح به فى الدعوى الخامسة عشرة تكون α و β : α و β :: α و β :

: α و β :: α و β : و فلذا كان α و β : α و β :: α و β :

و وتشابه قاعدتي α و β و γ و δ كانت α و β :

و γ و δ :: α و β : و فاذا ضربت حدود هذين التناصبين حدا بعد

يكون α و β و γ و δ : α و β : و γ و δ : α و β :: α و β :

: و ومن كون مقدار α و β : α و β : هو مساحة جسم هرم

و γ و δ : و مقدار و γ و δ : α و β : هو مساحة جسم هرم

و و γ و δ : كانت النسبة بين الهرمين المتشابهين كالنسبة بين مكعبى ضلعيهما

المتناظرين

(الدعوى السابعة والعشرون النظرية)

النسبة بين كثيرى السطوح المتشابهين كالنسبة بين مكعبى ضلعيهما المتناظرين

لانه يمكن انقسامهما الى اهرام مثلثية متشابهة (٢٣)

(شكل ٢١٩) فنسبة هرمي أف دم و أف دم كنسبة مكعبي ضلعي أم و أم المتساطين أو مكعبي ضلعي أ - و أ - وكذا في كل هرمين فلماذا كانت نسبة جميع الأهرام التي يتركب منها كثير السطوح أوزان كثير السطوح إلى كثير السطوح الآخر كنسبة مكعب ضلع من الأول إلى مكعب نظيره من الثاني وثبت المطلوب

(تجربة عمومية)

بيان ما كان في هذه المقالة من الدعاوى المتعلقة بالمساحة الجسمية من كثيرى

السطوح بطريق الجبر على سبيل الاجمال في هذا الحل

مثلاً إذا كانت - قاعدة منشور و ع ارتفاعه مساحة جسمه - \times ع أو - ع وكذا إذا كانت - قاعدة هرم و ع ارتفاعه مساحة جسمه - $\times \frac{1}{3}$ ع أو ع $\times \frac{1}{3}$ - أو $\frac{1}{3}$ ع و أيضاً إذا كانت ع ارتفاع هرم ناقص متوازي القاعدتين وكانت أ و - قاعدتيه وحيث أن γ - هو الوسط المتناسب بينهما مساحة جسمه $\frac{1}{3}$ ع \times (أ + - γ + -)

وإذا كانت - قاعدة منشور مقطوع و ع و ع و ع ارتفاعات ثلاث رؤسه العليا مساحة جسمه $\frac{1}{3}$ - \times (ع + ع + ع)

والنهاية إذا كانت ه و ه مساحة في كثيرى السطوح المتشابهين و - و - ضلعيهما أو قطريهما المتساطين فتكون نسبة ه : ه :: $\frac{3}{2}$: $\frac{3}{2}$ تحت المقالة السادسة بحسن توفيقه تعالى

(المقالة السابعة)

في بيان الكرات والثلثات الكروية

المحدود

حدد ١ الكرة جسم محدود باحاطة سطح منحني تكون جميع نقطه على ابعاد متساوية من نقطة داخله وتلك النقطة تسمى مركزا

(شكل ٢٢٠) يمكن ان يتصور وجود جسم الكرة بدوران نصف دائرة Δ Δ ه على قطر Δ ه لان كافة نقط السطح المنحني الحادث بمحركه منبجى Δ ه تكون على ابعاد متساوية من مركز Δ

(٢) نصف قطر الكرة هو الخط المستقيم الواصل بين مركزها وبين نقطة من سطحها وقطرها ومحورها هو الخط المستقيم المار من مركزها ومنتهى الطرفين الى سطحها وانصاف اقطار الكرة كلها متساوية وبجميع اقطارها ايضا متساوية حيث كانت اضعا فالانصاف اقطارها

(٣) على ما سبأني في الدعوى الاولى من الاثبات ان المقاطع الحادثة من المستويات تكون دوائر * فاذا علمت ما ذكرنا فالدوائر التي تمر من المركز تسمى دوائر عظمى والتي لم تمر منه تسمى دوائر صغرى

٤ المستوى الذي لا يثتترك مع الكرة الا في نقطة واحدة فقط يسمى مماسا بالكرة

٥ قطب دائرة الكرة نقطة من سطح الكرة تكون للابعاد التي بينها وبين جميع نقط محيط تلك الدائرة كلها متساوية فعلى ما سبأني في الدعوى السادسة ان الدائرة لها قطبان صغيرا كانت او كبيرة

٦ المثلث الكروي جزء من سطح الكرة احيط بثلاثة اقواس دوائر عظام وسميت تلك الاقواس اضلاع المثلث ولا زال كل واحد منها اصغر من نصف المحيط والزوايا الحادثة من تلاقي مستويهما تكون زوايا ذلك المثلث

٧ المثلث الكروي يسمى قائم الزاوية ومتساوي الساقين ومتساوي الاضلاع كما صرح به في المثلثات المستوية

٨ ذوا الاضلاع الكثيرة الكروي أو المضلع الكروي قسم من سطح الكرة محدود بأحاطة عدة اقواس دوائر نظام

٩ شقة الكرة قسم من سطح الكرة احيط بنصفى محيطين دائريين عظيمين محدودتين بقطر مشترك

١٠ ضلع الكرة قسم من جسم الكرة احيط بنصفى الدائريين العظيمين والشقة فاعده

١١ الهرم الكروي قسم من جسم الكرة فاعده مضلع كروي ورأسه زاوية مجمعة بالمركز احيط بسطوح مستوية انتهت الى تلك القاعدة وتلاصقت بها

١٢ المنطقة قسم من سطح الكرة محصور بين المستويين المتوازيين بان يكونا لها قاعدتين * وان كان أحدهما مماسا بالكرة فليس لها حينئذ الاقاعدة واحدة فقط

١٣ قطعة الكرة قسم من جسم الكرة محصور بين المستويين المتوازيين وهما لها قاعدتان * وان كان أحدهما مماسا بالكرة فليس لها حينئذ الاقاعدة واحدة فقط

١٤ ارتفاع المنطقة أو القطعة هو البعد الحقيقي بين قاعدتيها

١٥ (شكل ٢٢٠) كما يحصل جسم الكرة من ادارة نصف دائرة د ا ه على قطر د ه فالجسم الحاصل من دوران قطاع د ه و أو و ج يسمى قطاع الكرة

(الدعوى الاولى النظرية)

مقاطع الكرة الحادثة بمسوكها دوائر

مثلا (شكل ٢٢١) اذا كان مقطع ام - محدثا بمستوى في الكرة اتى مركزها * وانزل عمود ج ه من نقطة ج على مستوى ام - ووصلت خطوط

حـ و حـم المختلفة الى النقط المختلفة من منحى أـمـ الذى حدد المقطع وحيث ان خطوط حـم و حـم و حـ الموائى هى انصاف اقطار الكرة تكون متساوية وحيث انهما موائى افترت وهى متساوية الابعاد عن عمود حـ ع (مقالة ٥) ومن اجل ذلك كانت الخطوط المستقيمة وبالجملة عـ م و عـ م و عـ متساوية ومقطع أـمـ دائرة نقطة عـ مركزها

(نتيجة ١) وان كان المقطع يمر بمركز الكرة فنصف قطره هو نصف قطر الكرة فلذا كانت الدوائر العظام من الكرة كلها متساوية

(نتيجة ٢) الدائرتان العظيمتان ينصف بعضهما بعضا دائما حيث كان فصلهما المشترك قطرا يمر بالمركز

(نتيجة ٣) جميع الدوائر العظام تقسم الكرة وسطعا بمنساوين * لانه من بعد انفصال نصف الكرة اذا جعل محديم ما فى جهة واحدة وانطبق احدهما على الاخر مع اشتراك القاعدة من سطح الكرة اتحد السطحان وانطبقا وان لم ينطبقا لزم ان توجد نقط متباعدات واخر متقاربات من مركز الكرة وهذا بخلاف تعريفها

(نتيجة ٤) (شكل ٢٢١) مركز الدوائر الصغار ومركز الكرة يكون على الخط المستقيم العمود على مستوى الدائرة الصغيرة

(نتيجة ٥) (شكل ٢٢١) الدوائر الصغار أصغرها ابعدها عن المركز * لان بعد حـ ع كلما كبر صغور وتر أـ الذى هو قطر الدائرة أـمـ الصغيرة

(نتيجة ٦) يمكن مروردائرة عظيمة واحدة من نقطتين معينتين على سطح الكرة * لان هاتين النقطتين ومركز الكرة هى ثلاث نقط تعين المستوى هذا ان لم تكن تلك النقط على مستقيم واحد * واما اذا كانت النقطتان المعينتان واقعيتين على نهايتى القطر فهما والمركز على مستقيم واحد واذا يجوز أن تمر من هاتين النقطتين دوائر عظام كثيرة لا تنحصر عددا

(الدعوى الثانية النظرية) *

(شكل ٢٢٢) كل مثلث كروى فحو أـ حـ اى ضلع منه اصغر من مجموع الاثنى

الأخوين

فإذا كان ع مركز الكرة ووصلت انصاف اقطار ع ا و ع ح و ع ر
وتصور ان مستويات ا ع - و ا ع ح و ح ع ر شكلت زاوية مجسمة في نقطة
ع المرقومة وحيث ان اقواس ا - و ا ح و ح ر التي هي اضلاع مثلث
ا ح ر الكروي. مقادير زوايا ا ع - و ا ع ح و ح ع ر ولاجرم ان الثلاث
زوايا المحيطة بالزاوية المجسمة كل واحدة منها اصغر من مجموع الاثنين الاخرين
(٢١ بقالة) فنبت المطلوب من ان يكون كل واحد من اضلاع ا ح ر المثلث
الكروي اصغر من مجموع الاثنين الاخرين

• (الدعوى الثالثة النظرية) •

قوس الدائرة العظيمة الواصل بين نقطتين معينتين على سطح الكرة هو اقرب بـ $\frac{1}{2}$ بين تينك النقطتين

(شكل ٢٢٣) مثلاً إذا كان خط α - الواصل بين نقطتي A و B - قوس دائرة عظيمة * فإن قيل يمكن أن نقطة M الخارجة عن القوس المذكورة هي نقطة الخط الأصغر الواصل بين نقطتي A و B أقول يرسم MA و MB - قوسى دائرة عظيمة من نقطة M ويؤخذ $\alpha = \beta$ - فعلى ما ذكر فى الدعوى التى تقدمت قوس α - يكون أصغر من مجموع قوسى MA و MB - فإذا حذف β و α - رسم المتساويين يبقى $\alpha > \beta$ AM فالبعد من نقطة - الى نقطة M سواء اتجه بقوس α - أو كان خطاً آخر هو MA والبعد من نقطة - الى نقطة β * لأنه إذا دور مستوى دائرة α - العظيمة حول القطر المار بنقطة - تأتى نقطة M على نقطة β - فلذا يتعد الخط الأصغر من نقطة M الى نقطة - بالخط الذى هو من β الى -

فأحد الطريقين اعني البعد بين نقطتي ١ و - يمر من نقطة م والآخر من نقطة ن ولتساوى ما كان بين نقطتي م و - بما كان بين نقطتي ن و - من الطريقين وقد زعم ان المار من نقطة م هو الاصغر فلزم ان يكون البعد من نقطة ١ الى نقطة م اصغر من البعد من نقطة ١ الى نقطة ن وهو محال

* حيث ثبت أننا ان قوس $ام$ اكبر من قوس $اك$ فلهذا علم ان الخط الاصغر بين نقطتي $ا$ و $و$ ليس له نقطة خارجة عن $اك$ - قوس الدائرة العظيمة وهو الاصغر بينهما وثبت المطلوب

(الدعوى الرابعة النظرية)

مجموع ثلاثة اضلاع المثلث الكروي اصغر من محيط دائرة عظيمة (شكل ٢٢٤) مثلا اذا كان $ا-ح$ مثلثا كرويا وامتد ضلعا $ا-و$ و $ا-ح$ حتى يلتقيا في نقطة $د$ فقوسا $ا-د$ و $ا-ح$ يكونان نصف محيط * لان الدائرتين العظيمتين يقسم بعضهما بعضا على التساوي (الاولى) ولا جرم ان ضلع $د-و > د-ح$ في مثلث $د-و-ح$ (٢) فاذا زيد $ا-ب + ا-ج$ على كل من هذين الغير المتساويين يكون $ا-ب + ا-ج > ا-د + ا-ح$ اعني ان مجموع ثلاثة اضلاع المثلث اصغر من المحيط وثبت المطلوب

(الدعوى الخامسة النظرية)

كل مضلع كروي مجموع اضلاعه اصغر من محيط دائرة عظيمة (شكل ٢٢٥) مثلا اذا كان $ا-د-هـ$ مضلعا مخمسيا وامتد ضلعا $ا-و$ و $د-ح$ حتى التقيا في نقطة $و$ وحيث ان قوس $د-ح$ اصغر من مجموع قوسى $و-ا + و-د$ صار محيط مخمس $ا-د-هـ$ اصغر من محيط $ا-د-و-ا-د-هـ$ و ايضا اذا امتد ضلعا $ا-و$ و $د-ح$ حتى يلتقيا في نقطة $ر$ يكون $هـ-د > هـ-ر + ر-د$ فلذا صار محيط $ا-د-و-ا-د-هـ$ المرفوم اصغر من محيط مثلث $اود$ ولقد صرح في الدعوى السابقة ان مجموع الاضلاع الثلاثة من المثلث الكروي $ا-م-غ$ من محيط دائرة عظيمة فثبت المطلوب من ان يكون محيط المضلع الكروي $ا-د-هـ$ اصغر من محيط دائرة عظيمة وهذا أكد دليلا

تنبيه اصل بناء هذه الدعوى عين ما في الدعوى الثانية والعشرين من المقالة الخامسة لانه اذا كانت $ع$ مركزا ورسمت مجسمة بزوايا $ا-ع-و$ و $س-ع-ح$

و ح ع د الخ المستطحة فمجموعها اصغر من أربع قوائم فلا فرق بين هـ و هـ وبين ما في المقالة الخامسة في أصل البناء وان اختلف التعبير وطريق الاثبات ليكن حيث ان الاضلاع في كل منهم ما محببة لو امتدأ أحدها فلا يقطع شكله أبدا
* (الدعوى السادسة النظرية) *

(شكل ٢٠٠) اذ ا رسم قطر د هـ عمودا على ا م - مستوى الدائرة العظيمة فنهايتاه د و هـ تكونان قطبين لدائرة ا م - وما و ا زاهما من الدوائر الصغار نحو د هـ ر

أولا حيث ان خط ح د عمودا على مستوى ا م - فهو عمود على جميع الخطوط التي تمر من موقعه بنحو د ا و د م و د - الخ واقواس د ا و د م الخ تصير ارباع محيط وكذا اقواس هـ ا و هـ م و هـ - الخ فعلم ان كل واحدة من نقطتي هـ و د اقترقتا من كل من كافة نقط محيط ا م - متساوية الابعاد فكانتا قطبين لذلك المحيط .

ثانيا حيث ان نصف قطر د ح عمودا على مستوى ا م - فهو عمود على مستوى دائرة د هـ ر الموازية لها ويمر بذلك العمود من ع مركزها (١) فاذا رسمت خطوط د و د هـ و د ر

المواثل فهي متساوية لاقتراحها عن عمود د ع متساوية الابعاد وتتساوى اقواس د و د هـ و د ر الخ لتساوى اوتارها فلذا ثبت ان نقطة د هي قطب لدائرة د هـ ر وبذلك ثبت ان نقطة هـ قطبها الآخر

(نتيجة ١) حيث ان كل قوس واصل من نقطة من قوس دائرة ا م - العظيمة الى قطبها هو ربع محيط سمي ربعا فقط اختصارا فهـ ذا الربع يحـدث زاوية قائمة بقوس ا م * لان خط د ح عمودا على مستوى ا م - فكل مستو يمر بذلك العمود ونحو د م - يكون عمودا على المستوى المرقوم (١٨ مقالة ٥) فعلى ما صرح به في الحد السادس فالزوايا الحادثة بتلك المستويات نحو ا م - تكون قائمة

(نتيجة ٢) لاجل وجود قطب قوس ا م المعين برسم من نقطه م قوس م د

من غير تحديد عمودا على $ام$ ويؤخذ $م$ مساويا للربع فنقطة $د$ هي احد قطبي قوس $ام$ * اويرسم من نقطتي $ا$ و $م$ قوسا $اد$ و $م$ $د$ غير محدودين عمودين على قوس $ام$ فنقطة $د$ ملتقة هما هي القطب المطلوب (نتيجة ٣) وبالعكس اذا كان كل من البعدين من نقطة $د$ الى نقطتي $ا$ و $م$ مساويا للربع فنقطة $د$ هي قطب قوس $ام$ وحينئذ كل من زاويتي $دام$ و $امد$ تكون قائمة * لانه اذا كانت نقطة $د$ مركز الكرة ورسمت انصاف اقطار $دا$ و $دم$ فزاويتا $ادم$ و $مدا$ قائمتان فخط $د$ يكون عمودا على مستقيمي $دا$ و $دم$ فهو عمود على مستويهما فلذا صارت نقطة $د$ قطبا لقوس $ام$ فضلا عن قيام زاويتي $دام$ و $امد$ (تنبيه) لوجود تلك الخواص في الاقطاب سهل ترسيم الاقواس واجراء عملها فوق سطح الكرة كما رسمت فوق المستوى

مثلا اذا دور قوس $دو$ او كل خط قدره انقربا حول نقطة $د$ ترسم بنقطة ونهايته دائرة وتقدر الصغيرة واذا دور ربع $دوا$ حول نقطة $د$ فيرسم بنهاية اقوس $ام$ من دائرة عظيمة

وان اريد مقوس $ام$ او كان لا يعلم من عمره الا نقطتا $ا$ و $م$ فقط فلا يتعين قطب $د$ بالفصل المشترك بين القوسين المنشئين بانفراج واحد المساوي كل منهما للربع بان تجعل نقطتا $ا$ و $م$ مركزين * فليأخذت تعين قطب $د$ فيجعل مركزا وبالانفراج المرقوم يرسم قوس $ام$ وبه يتعين مخرجه وبالجملة اذا اريد انزال قوس عمود على قوس $ام$ المعلوم من نقطة $ف$ المعينة بتمدد قوس $ام$ حتى ينتهي الى نقطة $سم$ بأن يكون انفراج $فسم$ قدر ربع المحيط فاذا رسم قوس $فم$ من قطب $سم$ بمقدار الربع الرقيم فهذا القوس هو العمود المطلوب

• (الدعوى السابعة النظرية) •

كافة المستويات العماد على نهاية نصف القطر تمام بالكرة

(شكل ٢٢٦) مثلا اذا كان مستوى $واد$ عمودا على نهاية نصف قطر $ع$ ا

وأخذت نقطة م على ذلك المستوى ووصل ع أ و م أ فبعد م أكبر من بعد ع أ وذلك لقيام زاوية ع أ م فلذا تقع نقطة م خارج الكرة وكذا كل نقطة من مستوى و أ د و حيث لم يكن له والكرة نقطة مشتركة الانقطة ١ فقط ثبت المطلوب من أن يكون مماسا للكرة (حد ٤)

(تكملة) وكذلك ثبت مماس الكرتين إذا لم يكن لهما الانقطة مشتركة واحدة فقط حيث كان البعدين المركزين مساويا لمجموع أو لفاضل نصفي قطري الكرتين فالمرکز ان ونقطة التماس تصبحا على مستقيم واحد.

(الدعوى الثامنة النظرية)

(شكل ٢٢٦) زاوية س أ د الحادتين أ س و أ د قوسى الدائرتين العظيمتين مساوية للزاوية و أ د المسجلة في نقطة أ من مماسى القوسين المرقومين ويكون قوس د ه المرسوم بين ضلعي أ س و أ د الخارجين حسب الاقتضاء بأن تكون نقطة أ قطبا لمعيارا للزاوية

لان مماس أ و المرسوم في مستوى قوس أ س عمود على نصف قطر أ ع وكذلك مماس أ د المرسوم في مستوى قوس أ د يكون عمودا على أ ع المرقوم فلذا زاوية و أ د تكون مساوية للزاوية الحادتين بين مستويي ع أ س و ع أ د (١٧ مقالة ٥) اعنى ما بين قوسى أ س و أ د و سميت س أ د وكذلك إذا كان قوسا أ د و ه ربعين فزاوية د ع ه تساوى ما بين مستويي أ ع د و أ ع ه حيث أن خطي ع د و ع ه عمودان على خط ع أ فلذا كان قوس د ه معيارا لما بين المستويين اعنى زاوية د أ س

نتيجة تتقد الزوايا من المثلثات الكروية بتقدير أقواس الدوائر العظام المحصورة بين أضلاعها بأن تكون رؤس زواياها أقطابا وكذلك سهلت طريقة رسم زاوية مساوية لزاوية معلومة

(شكل ٢٣٨) الزاويتان المتقابلتان رأسا نحو أ ح ع و د ح ع متساويتان * لان كلامهما لازالت تشكلا بين مستويي أ ح د و ع ح د * ولا يخفى أن مجموع كل متجاورتين حادثتين من تلاقى قوسى أ ح د و ع ح د مساو

لقائمتين نحو زاويتي ا د ع و ع د -

(الدعوى التاسعة النظرية)

(شكل ٢٢٧) اذا كان مثلث ا - د معلوما ورسم مثلث د ه و مشكلا باقواس ه و و د و د ه بأن تكون نقطة ا و - و اقطابا نقطة د و ه و و تكون اقطابا ايضا لاقواس د - و ا د و ا - اضلاعه لان نقطة ا قطب لاقوس ه و فبعد ا ه يكون ربعا وكذا بعد ه د حيث كانت نقطة د قطب لاقوس د ه فلذا نقطة ه تكون قطب لاقوس ا د حيث كان بعدها من كل من نقطتي ا و د مساويا لربع (٦ نتيجة ٣) وبمثلته ثبت ان نقطة د قطب قوس د - ونقطة و قطب قوس ا - .
(نتيجة) كما رسم مثلث د ه و بواسطة مثلث ا - د فمثلث ا - د ايضا يرسم بواسطة

(الدعوى العاشرة النظرية)

(شكل ٢٢٧) اذا وضعت الاشياء التي كانت فيما تقدمت عنها مقدار كل زاوية من احد مثلثي ا - د و د ه و تساوى التفاضل بين نصف المحيط والضع المقابل لهما من المثلث الاخر فيتمد ضلعا ا - و ا د حسب الاقتضاء حتى يلاقيا خط ه و في نقطتي د و ح ومن كون نقطة ا قطب لاقوس د ح فهو معيارها ولكن حيث ان قوس ه ح ربع وكذا قوس د و فنقطة ه هي قطب قوس ا ح ونقطة و هي قطب قوس ا د فلذا صار مجموع د ح + د و قدر نصف المحيط وهو عين مجموع ه و + د ح فقوس د ح معيار زاوية ا يساوى نصف المحيط مطروحا منه قدر ضلع ه و وكذا مقدار زاوية د يساوى نصف المحيط - د و ومعيار زاوية د هو نصف المحيط - د ه ويقع التعاكس في هذه الخامسة بين المثلثين لان كل واحد منهما ماضى رسوم بواسطة الاخر فلذا وجدت مقادير د و ه و و زاويا مثلث د ه و وهي $\frac{1}{4}$ محيط - د و $\frac{1}{4}$ محيط - ا د و $\frac{1}{4}$ محيط - ا - د *

فأقول مثلاً إذا كان قوس Γ معيار الزاوية \angle فيصير $\Gamma = +$ و $\Gamma = \Gamma + \Gamma = \frac{1}{\Gamma}$ المحيط فلذا قوس $\Gamma = \frac{1}{\Gamma}$ المحيط $\Gamma - \Gamma$ وكذا باقي الزوايا ومن ثمة قام البرهان على ما اريد اثباته

تنبيه (شكل ٢٢٨) وأما الثلاثة الاخر الممكن تشكيلاها بفصول اقواس Γ و Γ و Γ و الثلاثة فلا بد لها من علامة فارقة تميزها عن مثلث Γ وهو فلا ملحاً في هذه الدعوى الا الى تسمية المثلث مركزياً و يتميز مثلث Γ من الثلاثة الاخر بان تكون زاويته Γ و Γ في جهة واحدة من طرفي ضلع Γ (شكل ٢٢٧) و Γ و Γ في جهة ضلع Γ و Γ وفي احدى جهتي ضلع Γ فصار يميز بذلك عن المثلثات الثلاث الاخر واستحسن في هذا الباب تسمية مثلثي Γ و Γ كل واحد مثلثاً قطبياً وان سماها بعض أقواماً بآراء مختلفة

(الدعوى الحادية عشرة القائدة)

*(شكل ٢٢٩) اذا كان مثلث Γ معلوماً ورسم Γ قوس دائرة صغيرة بقدر انفرج Γ من قطب Γ وقوس Γ من قطب Γ بانفتاح Γ ووصل قوساً الى الدائرة العظيمة Γ و Γ من نقطة Γ تقاطع قوس Γ و Γ فاقسام مثلث Γ الحادث تساوى اقسام مثلث Γ لان ضلع $\Gamma = \Gamma$ بالعمل وضلع $\Gamma = \Gamma$ ولاشترك Γ كانت الاضلاع الثلاثة المتناظرة في المثلثين متساوية * فالزوايا المقابلة لتلك الاضلاع تكون متساوية * فاذا فرض مركز الكرة Γ وتصور تشكيلاً زاوية مجسمة في نقطة Γ بزوايا Γ و Γ و Γ المسطحة وكذلك الاخرى بزوايا Γ و Γ و Γ و حيث ثبت التساوى بين الاضلاع المتناظرة من مثلثي Γ و Γ فظهر ان الزوايا المسطحة التي تحيط باحدى المجمعتين مساوية ومناظرة للزوايا التي تحيط بالآخرى وكن في الدعوى (٢٣) مقالة (٥) ثبت التساوى بين كل انحراف حادث بين المستوية المتناظرة من احدهما والاخرى فصارت زوايا مثلث Γ الكروي مساوية لزويا مثلث

حـ اـ الآخر اعني دـ اـ = رـ اـ و دـ اـ = اـ رـ و ا دـ = ا حـ
 فتبين تساوي الاضلاع والزوايا المتناظرة في مثلثي ا ر د و ا ر ح
 تنبيه ما كان في هذين المثلثين من المساواة ليس مطلقا أي ليس على طريق التطبيق
 * لانهما مالم يكونا متساويي الساقين لا يمكن تطبيق احدهما على الآخر وهذا
 من قبيل ما ذكرناه من تساوي المثلثين ومن اجل ذلك وجب تسمية مثلثي ا ر ح
 و ا د ر متماثلين

* (الدعوى الثانية عشرة النظرية) *

في كرة واحدة او في كرات متساوية يتساوى المثلثان الكرويان وتساوى
 اقسامهما اذا تساوى منهما منى الاضلاع واحاد الزوايا التي بينهما
 (شكل ٢٣٠) مثلا اذا كان ضلع ا ر = هـ و و ا ح = هـ د وزاوية
 ر ا ح = و هـ ر ينطبق مثلث هـ و ر على مثلث ا ر ح او على مماثله
 ا ر د الآخر كما وقع بين المثلثين المستقيمي الاضلاع اذا تساوى منهما الضلعان
 والزاوية التي بينهما ولما واة اقسام مثلث هـ و ر لاقسام مثلث ا ر ح تتساوى
 الاقسام الباقية منهما وبصير ضلع ر ح = و ر وزاوية ا ر ح = هـ و ر
 وزاوية ا ح ر = هـ و ر

* (الدعوى الثالثة عشرة النظرية) *

يتساوى المثلثان الكرويان الموضوعان على كرة واحدة او كرات متساوية
 وتساوى جميع اقسامهما اذا تساوى منهما آحاد الاضلاع ومجاوراه من منافي
 الزوايا

لانه يمكن تطبيق احدهما على الآخر كما فعل بمستقيمي الاضلاع فلا حاجة الى
 بسط برهان بل حسبك ما صرح به في الدعوى (٧) من المقالة الاولى

* (الدعوى الرابعة عشرة النظرية) *

يتساوى المثلثان الموضوعان على كرة واحدة او كرات متساوية اذا تساوت
 اضلاعهما المتناظرة الثلاثة * اي تتساوى منهما ايضا الزوايا المتناظرة الموتره
 بتلك الاضلاع

(شكل ٢٢٩) وهذه القضية واضحة مما صرح به في الدعوى (١١) اذ لا يمكن فيها الارسم مثلثين اثنين α و β و γ بثلاثة اضلاع معلومة نحو α و β و γ هذا و وقوع الخلاف في جهة وضع الاقسام وان كان ممكلا لكن لا مخالفة في صحة تساويها قدر او من ثمة ثبت تساوي المثلثين وتساوي اقسامهما على التناظر

وذلك التساوي اما ان يكون مطلقا او ثنائيا والمعنى متى تساوت اضلاعهما الثلاثة تتساوى الزوايا المتناظرة المقابلة لتلك الاضلاع
 * (الدعوى الخامسة عشر النظرية) *

كافة المثلثات الكروية المتساوية الساقين مثاني زواياها المقابلة للاضلاع المتساوية متساوية

وبالعكس المثلث الكروي اذا تساوت زاويتاه فهو متساوي الساقين
 (شكل ٢٣٢) اولا اذا كان $\alpha = \beta$ فزاوية $\gamma =$ زاوية α لانه اذا انزل قوس α من رأس α على γ وسط القاعدة فالمثلثان الحادان α و β تتساوى اضلاعهما الثلاثة المتناظرة لاشتراك α و β و $\gamma = \alpha$ و $\beta = \alpha$ فعلى ما صرح به في الدعوى التي تقدمت تتساوى زواياهما المتناظرة وبالجملة زاوية γ تكون مساوية لزاوية α

وثانيا اذا كانت زاوية $\gamma =$ زاوية α فضع $\alpha = \beta$ * لانه ان لم يكن α مساويا β وكان α اكبرهما يؤخذ $\beta = \alpha$ ويوصل β و α مساواة ضلعي β و α اضلعي α و β وكون زاوية β بين الاولين مساوية لزاوية α بين الثانيين يلزم تساوي ما بقى من اقسام مثاني β و α (١٢) فزاوية $\beta = \alpha$ وقد فرض مساواتها لزاوية α فيلزم ان تكون زاوية $\beta = \alpha$ واذ يلزم مساواة الجزء للكل وهو محال فكان عدم المساواة بين α و β المقابلين لزاويتي γ و γ المتساويتين غير ممكن وينتج المطلوب من ان ضلع α مساو لضلع β

تنبيه مساواة زاوية α زاوية β وزاوية γ زاوية δ ثابتة بالطريق الذي سبق ولقيام زاويتي α و β على ان القوس الواصل من رأس مثلث متساوي الساقين الى وسط قاعدته يكون عمودا عليها ويقسم زاوية الرأس الى قسمين متساويين .

(الدعوى السادسة عشرة النظرية)

(شكل ٢٣٢) اذا كانت زاوية α اكبر من زاوية β في مثلث $\alpha\beta\gamma$ الكروي فضلع γ المقابل لزاوية α يكون اكبر من ضلع β المقابل لزاوية β .

وبالعكس اذا كان ضلع γ اكبر من ضلع β فزاوية α تكون اكبر من زاوية β .

بيان ذلك اولاً ان تقول حيث ان زاوية $\alpha < \beta$ فاذا انشئت زاوية $\alpha = \beta$ لزاوية β بصير $\alpha = \beta$ (١٥) α كن مجموع $\alpha + \beta$ اصغر من ضلع γ فاذا وضع β مقام α ظهر ان يكون $\beta < \gamma$ او $\alpha < \gamma$.

وثانياً اذا فرض $\beta < \gamma$ فزاوية α تكون اكبر من زاوية β .

لانه اذا تساوت زاوية α زاوية β بصير $\alpha = \beta$ واذا كانت $\alpha > \beta$ يكون $\beta > \alpha$ كما ذكرنا فكل فيه خلاف لما فرض ومن ثمة ثبت المطلوب من ان تكون زاوية α اكبر من زاوية β .

(الدعوى السابعة عشرة النظرية)

(شكل ٢٣٣) اذا تساوى ضلعا α و β من مثلث $\alpha\beta\gamma$ ضلعي δ و ϵ من مثلث $\delta\epsilon\zeta$ وكانت زاوية α اكبر من زاوية δ فضلع γ الثالث من المثلث الاول يكون اكبر من ضلع ζ من الثاني وحسب ان في اثبات هذه ما صرح به في الدعوى العاشرة (من المقالة الاولى)

* (الدعوى الثامنة عشرة النظرية) *

إذا كان المثلثان المرسومان على كرة واحدة أو كرات متساوية متساويي الزوايا فهما متساويي الاضلاع

فإذا كان $ا و ب$ مثلثين معلومين $و و ك$ مثلثيهما القطبيين يلزم من تساوي الزوايا في مثلثي $ا و ب$ أن يكون مثلثا $ب و ك$ القطبيين متساويي الاضلاع (١٠) ولكن اتساوي اضلاع مثلثي $ب و ك$ القطبيين تتساوي زواياهما (١٤) وبذلك ظهر انه متى تساوت الزوايا في مثلثي $ب و ك$ تساوت الاضلاع (١٠) فلذا ظهر تساوي الاضلاع من مثلثي $ا و ب$ القطبيين المتساويي الزوايا هذا وسيذكر اثبات هذه الدعوى في المثلث القطبي فراجع ان شئت .

(شكل ٢٣٤) إذا تساوت زوايا مثلثي $ا ب ج$ و $د ه و$ اعني اذا كانت $ا = د و ب = ه و ج = و$ ويصير $ا ب = د ه و ا ج = د و$ على استقامة ضلعي $ا ب و ا ج$ ووصل $د ج$ وهد فوسا $ب ج و د ج$ حتى التقيا في نقطة $ط و ك$ فتساوي ضلعي $ا د و ا ج$ اضلعي $د و د ه$ بالعمل وحيث كانت زاوية $د ا ج = د ا ه = د و$ فتساوي الاقسام على التناظر في مثلثي $ا د ج و د ه و$ (١٢) وبناء عليه تكون زاوية $ا د ج = د ه و = ا ب ج$ وزاوية $ا ب ج = د و ه = ا ب ج$ ولاشتر الاضلاع $ب ج و د ج$ في مثلثي $ط ب ج و ك د ج$ وكون زاوية $ط ب ج = د ر ك$ وكون مجموع زاويتي $ط ب ج + د ب ك$ مساويا لقائمتين ومجموع زاويتي $د ر ك و ط ر د$ فتصير زاوية $د ر ك = ط ر د$ فلذا اتساوي مثلثا $ط ب ج و د ر ك$ (١٣) ومن ثمة كان $ط د = ر ك و ط ب = د ك$ وايضا من كون زاوية $ا ب ج = ا ب ج$ تساوي مثلثا $ط ب ج و د ر ك$ لتساوي اتحاد الاضلاع ومجاورتها من الزوايا في المثلثين المرقومين فيكون $ط ج = ح ك و ح ك = ط ج$

فإذا طرح من ك و ط ر المتساويين ك و ط ح المتساويان الآخران
يبقى م ح و م ح متساويين ومن كون زاوية $\text{ر ح ا} = \text{ا ح ر}$ وزاوية
 $\text{ا ر ح} = \text{ا ر ح}$ يتساوى مثلثا ا ر ح و ا ح ر لتساوى آحاد الاضلاع فيهما
والزوايا متساوية ولساواة كل قسم من مثلث د ه و لكل قسم من مثلث ا ر ح
يصير مثلث د ه و ايضا مساويا لمثلث ا ر ح ومن ثمة يكون $\text{ا ر} = \text{د ه}$
و $\text{ا ح} = \text{د و}$ و $\text{ر ح} = \text{ه و}$ فظهر انه اذا تساوت الزوايا من المثلثين
الكرويين يتساوى منهما الاضلاع

تنبيه ماذ كرفى هذه الدعوى لايجرى في المثلث المستقيم الاضلاع * لانه اذا
تساوت جميع الزوايا في المثلث المستقيم الاضلاع لايجوزكم على اضلاعها
الابالتناسب وبهذه تبين الاختلاف بين المثلثات المستقيمة الاضلاع والكروية
باسهل طريق في هذه الدعوى وفي (١٢) و (١٣) و (١٤) و (١٧) وقد صار
البحث عن تقدير المثلثات ببعضها وأنضح بيانها سواء كانت موضوعة على كرة
واحدة او كرات متساوية

وقد ذكرنا ان الاقواس المشابهة تناسب أنصاف اقطارها فلا يصح التشابه بين
المثلثين المرسومين على كرتين متساويتين ما لم يكونا متساويين فلذا صار تساوى
الزوايا موجبا لتساوى الاضلاع واما اذا كانت المثلثات موضوعة على كرات
غير متساوية فانما تشابه تلك المثلثات اذا تساوت الزوايا وتكون النسبة بين
اضلاعها كالنسبة بين أنصاف اقطار تلك الكرات

* (الدعوى التاسعة عشرة النظرية) *

مجموع زوايا المثلث الكروى اصغر من ست قوائم واكبر من قائمتين
وبين ذلك اولا أن كل زاوية في مثلث كروى اصغر من قائمتين (نظرا الى التنبيه
الآتى) فلذا كان مجموع زوايا المثلث الكروى الثلاث اصغر من ست قوائم
وثانيا ان مقدار كل زاوية في مثلث كروى يساوى نصف المحيط اذا طرح منه
الضلع المقابل لها من المثلث القطبي (١٠) فلذا كان مقدار مجموع الزوايا الثلاث
من المثلث الكروى يساوى التفاضل بين ثلاثة أنصاف المحيط وبين مجموع

الاضلاع الثلاث من المثلث القطبي ولكون هذا المجموع الاخيرا صغرم من محيط دائرة عظيمة (٤) اذا طرح من ثلاثة اقسام المحيط فالباقي يكون اكبر من نصف المحيط أعني قائمتين ومن ثمة ظهر ان مجموع الزوايا الثلاث من كل مثلث كروي يكون اكبر من قائمتين

(نتيجة ١) مجموع الزوايا الثلاث في المثلث الكروي ليست على قرار واحد كافي المثلث المستقيم الاضلاع بل يزيد وينقص محصورا بين قائمتين وست قوائم غير مساوا لاحدهما ومن ثمة اذا علمت زاويتاه فالثالثة

(نتيجة ٢) قد يكون في المثلث الكروي قائمتان وثلاث ومنفرجتان وثلاث (شكل ٣٥) اذا كان مثلث ABC قائم الزاويتين A و B في اذا كانت زاويتا C و D قائمتين تكون رأس A قطب قاعدة BC (٦) وكل واحد من ضلعي AB و AC يكون ربعا

وما عدا هذا اذا كانت زاوية A ايضا قائمة فمثلث ABC الكروي يكون قائم الزوايا الثلاث فيبندونكون كافة زواياه قوائم واضلاعه اربعا المثلث الكروي القائم الزوايا الثلاث يحتوى عليه سطح الكرة ثمان مرات وسيرى في الشكل ٢٣٦ قوس MD ربعا

تنبيه في الدعاوى التي تقدمت يفرض ان ضلع المثلث الكروي اصغرم من نصف المحيط لما صرح به في الحد الاول فلذا لا يتكون المثلث الا وزاوية منه دون قائمتين

(شكل ٢٣٤) اذا كان ضلع AB اصغرم من نصف المحيط وكذا AC فلاجل التقاء هذين القوسين في نقطة D يمكن ان يخرج جاعا ومن كون مجموع زاويتي ABC و ACD قد برهنا قائمتين تكون زاوية ACB وحدها اصغرم من قائمتين

ومن المشاهد في المثلثات الكروية ما بعض اضلاعه اكبر من نصف المحيط وبعض زواياه اكبر من قائمتين بحيث اذا امتد ضلع AB على ان يتم محيط ACB الكامل وطرح مثلث ABC من نصف الكرة يبقى مثلث يسمى ACD اضلاعه

أر و ح و ا هـ و ضلع ا هـ و اكبر من نصف محيط ا هـ و زاوية
 - المقابلة له قد تجاوزت القائمتين بمقدار حـ و
 تذييل يشاهد ان زيادة الاضلاع والزوايا كبر اتوى الى التجاوز عن حدود
 المثلثات وتعرف اتم الكن حل تلك المثلثات او تحديد اقسامها لم يزل منحصرا في
 التعريفات بلا تجاوز عن حدودها لانه اذا طرح مثلث ا ر ح من نصف الكرة
 وهو معلوم الاضلاع والزوايا فلا جرم ان الزوايا والاضلاع من المثلث الباقي
 تعلم بسهولة

(الدعوى العشرون النظرية)

(شكل ٢٣٦) نسبة شقة ا م ر د الى سطح الكرة كنسبة ح ا ك زاوية
 الشقة الى اربع قوائم أو كنسبة قوس م د مقدار تلك الزاوية الى المحيط
 وليفرض ان نسبة قوس م د الى محيط م د ح ك كالنسبة بين عددين
 صحيحين كنسبة عدد ٥ الى عدد ٤ مثلا فاذا قسم محيط م د ح ك الى
 ثمانية واربعين جزءا متساوية محتوى قوس م د على خمسة منها ثم اذا وصل
 بين قطب آ ونقط التقسيم يارباع بقدر ذلك يحدث في نصف كرة ا م ر د ح ك
 ثمانية واربعون مثلثا متساوية حيث تساوت اقسامها ولا جرم ان الكرة الكاملة
 قد احتوت على ست وتسعين مثلثا وشقة ا م ر د ا تحتوي على عشرة مثلثات
 فعلى هذا تكون نسبة الشقة الى الكرة كنسبة عدد ١٠ الى عدد ٩٦ أو كنسبة
 عدد ٥ الى عدد ٤٨ يعنى كنسبة قوس م د الى المحيط ومن هذه الادلة التي
 ذكرنا ثبت ان النسبة بين قوس م د والمحيط كنسبة الشقة الى الكرة وان لم
 يكن مقياس مشترك بينهما وبين المحيط

(نتيجة ١) النسبة بين الشقتين كالنسبة بين زاويتيها

(نتيجة ٢) قد ذكرنا سطح الكرة يساوى ثمانية مثلثات قائمة الزوايا الثلاث (١٩)
 فاذا جعل احدها هذه المثلثات واحدا يكون سطح الكرة ٨ أمثاله اذا علمت ما ذكر
 يعبر عن سطح الشقة التي زاويتها ١ بمقدار ٢ ١ وذلك متى قدرت زاوية ١
 يجعل القائمة واحدا وحيث كانت ٢ ١ : ٨ : ١ : ٤ فقد وجد ههنا

حدان مختلفان احدهما من جنس الزاوية وهى القائمة والاخر من جنس
السطح وهو المثلث القائم الزوايا الثلاث الذى اضلاعه ارباع
تنبيه نسبة ضلع الكرة المحصور بين مستويي أم و احـ الى جسمها
الكامل كنسبة زاوية ا الى ارباع قوائم لانه متى تساوت الشقوق تساوت
اضلاع الكرة فلذا كانت النسبة بين ضلعي الكرة كنسبة بين الزاويتين
المحاطتين بمستوييهما

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية)

المثلثان الكرويان المتماثلان متساويان سطحا

(شكل ٢٣٧) اذا كان مثلثا اـ حـ و د هـ و متماثلين اعنى ان اـ حـ = د هـ
واـ حـ = د هـ و لم يمكن تطبيق احدهما على الاخر فسطح مثلث
اـ حـ مساو لسطح مثلث د هـ و

فتجعل نقطة ب قطبا للدائرة الصغيرة التى تمر بنقط ا و حـ الثلاث (١)
ويرسم من هذه النقطة اقواس با و بب و بـ حـ المتساوية (٢) ويرسم
زاوية دون من نقطة و مساوية لزاوية اـ حـ ويرسم قوس و بـ
مساويا لقوس حـ بـ ويوصل دـ و هـ و

فمثلثا دون و اـ حـ يتساويان لتساوى الاقسام كلها فمما حيث ساوى ضلعا
دو و وـ وضلعي اـ حـ و و زاوية دون = اـ حـ (١٢) فساوى ضلع
دـ ضلع اـ و زاوية دـ و = اـ حـ

ولتساوى زاويتي د هـ و اـ حـ المقابلتين اضلعي د هـ و اـ المتساويين
فى مثلثي د هـ و اـ حـ المتقدمين (١١) اذا طرحت منهـ ما زاويتا دون
و اـ حـ المتساويتان بالعمل تبقى زاويتا د هـ و د هـ متساويتين
ولساوات ضلعي د و و هـ لضلعي بـ حـ و حـ و وجود التساوى بين جميع
اقسام مثلثي د هـ و حـ بـ يكون ضلع د هـ = بـ حـ و زاوية
د هـ = حـ بـ

فالآن اذا نظرت فى مثلثي دون و اـ حـ بعين فكر ترى ان الاضلاع المتناظرة

متساوية وأنه يمكن تطبيق أحدهما على صاحبه حيث كانا متساويين السابقين
لأنه إذا وضع ضلع $را$ على $قو$ المساوي ليقع $رح$ على $ق$ المساوي
له ومن أجل ذلك اختلط المثلثان واتحدافلذا وقع التساوي ومن ثمة كان سطح
 $دقو = ارح$ وكذلك أثبت أن سطح $وقه - حرر$ وسطح
 $دقه = ارر$ فعلى هذا صار $دقو + وقه - دقه = اره = اره$
 $+ حرر - ارر - ارر$ أو $دوه = اره$ فقد انضغ تساوي مثلثي
 $ارح و دوه$ سطحا

* (تنبيه) * حيث يمكن وقوع قطبي $رون$ داخل مثلثي $ارح و دهر$ فحينئذ
يجب انضمام ثلاثة مثلثات $دقو و وقه و دقه$ لتركيب مثلث $دهو$
ومثل ذلك يجب لتركيب مثلث $ارح$ من $ارح و حرر و اسد$ الثلاث
الآخر والاثبات فيه وفيما ينتج منه على وتيرة واحدة
(الدعوى الثانية والعشرون النظرية)

(شكل ٢٣٨) إذا تقاطعت دائرتا $اع - و د ع$ كما براد في نصف كرة
 $اع د$ فمجموع مثلثي $اع د و ر ع د$ المتقابلين مساو للشقة التي زاويتها
 $ر ع د$

لأنه إذا امتد قوسا $ع - و ع د$ حتى التقيا في نقطة $د$ من النصف الآخر
من الكرة فقوس $ع - د$ يكون نصف محيط وكذا $اع - ر$ فيبقى $ر - د = اع$
إذا طرح $ع - ر$ من كل من الطرفين وبذلك يكون $د = د ع و ر - د = ار$
فلذا ثبت التساوي بين مثلثي $اع د و ر د$ لتساوي أضلاعهما الثلاثة ونظرا
إلى هذا الوضع حيث أنهم امتد الان فهما متساويان سطحا (٢١) ومن أجل ذلك
ظهر أن يكون مجموع مثلثي $اع د و ر ع د$ مكافئ للشقة $ع - د ع$ التي
زاويتها $ر ع د$ وبذلك المطلوب

تنبيه لقد تبين من هذا أن مجموع الهرمين وهما ما كانت القاعدة فيهما $اع د$
و $ر ع د$ مكافئ أيضا لضلع الكرة وهما ما كانت زاويته $ر ع د$

(الدعوى الثالثة والعشرون النظرية)

سطح كل مثلث كروى يساوى القفاضل بين مجموع زواياه الثلاث وبين قائمتين
 (شكل ٢٣٩) اذا كان $ا - ح$ المثلث المقروض وامدت اضلاعه حتى تلاقت
 بمحيط دائرة $د ه و$ العظيمة المرسومة كيفه اتفق خارجا عنه فعلى ما صرح به
 فى الدعوى التى سلفت يكون مجموع مثلثى $ا د ه و ا ر ح$ مكافئا للشقة التى
 زاويتها $ا$ ومقدارها $ا٢$ (٢٠) فلذا صار $ا د ه + ا ر ح = ا٢$ وبمثل
 يثبت ان $د و ر + ر ط د = ٢ - و ط ح + ح و ه = ٢$
 ولزيادة مجموع هذه المثلثات الست عن نصف الكرة بمقدار ضعف مثلث $ا - ح$
 ومقدار نصف الكرة بمقدار بعدد ٤ كان ضعف ذلك المثلث مقدار $ا٢$
 $+ ٢ + ٢ + ٢ - ٤$ ومن ثمة كان مقدار مثلث $ا - ح = ا٢$
 $+ - + - ٢ - ٢$ وتبين ان كل مثلث كروى سطحه يساوى القفاضل بين
 زواياه الثلاث وبين القائمتين

(نتيجة ١) مثلث $ا - ح$ المقروض يحتوى على المثلث القائم الزوايا الثلاث اعنى
 ثمن الكرة المتخذ احدا بقدر ما فى تلك المساحة من قائمة (٢٠) مثلا اذا كانت
 كل واحدة من زواياه $= \frac{\pi}{4}$ قائمة فمجموع الزوايا الثلاث منه يساوى اربع
 قوائم وتتعين مساحته هكذا $٤ - ٢$ او ٢ وهو مقدار اشتغال المثلث
 المقروض على المثلث الواحدى وهو ثمن الكرة ومن ثمة كان مجموع المثلثين القائمتين
 الزوايا الثلاث مساويا لربع الكرة

(نتيجة ٢) لو جود التكافى بين مثلث $ا - ح$ والشقة التى زاويتها $ا - ح + ح - ا$
 وجب التكافؤ بين الهرم المثلثى الذى قاعدته $ا - ح$ وبين ضلع الكرة الذى
 زاويته $ا - ح + ح - ا$

تبينه كما قدر مثلث $ا - ح$ الكروى بالمثلث الكروى القائم الزوايا الثلاث
 يتقدر الهرم الكروى القاعد على $ا - ح$ بالهرم القائم الزوايا الثلاث
 ويظهر من هذا عين ما ذكر من التناوب وتقدر مجسمة رأس الهرم بمجسمة
 رأس الهرم القائم الزوايا الثلاث وذلك مبنى على ما صرح به من الاقسام * لانه
 متى انطبقت قواعد الاهرام انطبقت ذواتها وانطبقت رؤس زواياها المجسمة

ويستخرج من هذانتيجتان

الاولى النسبة بين الهرمين الكرويين كالنسبة بين قاعدتيهما واذا أمكن تقسيم الهرم ذى الاضلاع الكثيرة الى اهرام مثلثية تبين ان النسبة بين مطلق الاهرام كالنسبة بين قواعدها السكثيرة الاضلاع

الثانية لاتحاد التناسب بين القواعد وبين الرؤس المجسمة اذا اردت تقدير اى زوايتين مجسمتين بلزم وضع رؤسهما فى مركزى كرتين متساويتين ومن ثمة صارت النسبة بين هاتين المجسمتين كالنسبة بين المضاعين المتحصرين بين مستويهما وحيث تشبكت الزاوية المجسمة فى الهرم القائم الزوايا الثلاث من ثلاث مستويات متعادلة قد صحت تسميتهن زاوية مجسمة قائمة واستحسن اتخاذها مقياسا للتقدير ملبسواها من الجسمان وكان ذلك من باب اولى فاذا علمت ما ذكر فالعدد الذى يري مساحة المثلث الكروى كذلك يكون مقدار الزاوية المجسمة المقابلة له مثلا اذا كانت مساحة المثلث الكروى $\frac{2}{3}$ من المثلث القائم الزوايا الثلاث فمساحة الزاوية المجسمة التى تقابلها تساوى $\frac{2}{3}$ من المجسمة القائمة فتأمل

(الدعوى الرابعة والعشرون النظرية)

المساحة السطحية من المضلع الكروى تساوى التفاضل بين مجموع زواياه وبين حاصل ضرب عدد اضلاعه بعد حذف اثنين بمقدار القائمتين

(شكل ٢٤٠) فاذا وصلت اقطار احدى رؤس الى جميع الرؤس الاخر فينقسم مضلع احدى الى مثلثات بعدد اضلاعه الا اثنين وقد سبق ان كل مثلث مساحة سطحه تساوى الباقي عند طرح قائمتين من مجموع زواياه وقد علم ان زوايا المضلع عين الزوايا من المثلثات ومن اجل ذلك تبين ان مساحة السطح المضلع تساوى الباقي اذا طرح من مجموع زواياه حاصل ضرب القائمتين بعدد اضلاعه بعد حذف اثنين وثبت المطلوب

تبينه اذا فرض ان مجموع زوايا المضلع الكروى ستة وعدد اضلاعه ٥ والقائمة احدى مساحة سطحه تكون ستة - ٢ (٢ - ٢) أو ستة - ٢ + ٢ = ٤ فتأمل

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية)

إذا كان عدد الزوايا المجسمة من كثير السطوح s وعدد وجوهه e وعدد
 سروره a على حدوده 1 أقول لا يزال $s + e = 2 + 2a$ فتؤخذ
 نقطة داخل كثير السطوح ومنه اتوصل خطوط مستقيمة إلى رؤس الزوايا كلها
 ثم تجتمع تلك النقطة مع كل زاوية تصور رسم سطح كروي يتلاقى بالخطوط المرقومة
 في تلك النقطة بعدد هاتفي وصل ما بين تلك النقطة المذكورة بأقواس دوائر عظام بذلك يتصور
 تشكيل مضلعات كروية تكون مقابلة لوجوه كثير السطوح المفروض وتحدد بها
 عددا

(شكل ٢٤٠) مثلاً إذا كان $s = 4$ أحد المضلعات المذكورة وفرض عدد
 اضلاعه $e = 5$ ومجموع زواياه $a = 10$ (أو $s = 4$ و $e = 5$) فتكون مساحة
 سطحه $s = 4$ وكذا يستخرج البواقي من المضلعات فإذا
 اجتمعت فمجموعها أو سطح الكرة الذي قد تعين بعدد 8 بساير مقدار مجموع
 كافة زوايا تلك المضلعات ناقص ضعف عدد الاضلاع $2e = 10$ أربعة أمثال الوجوه
 الموجودة وحيث أن ما يمكن حصره من الزوايا المسطحة حول نقطة 1 قدر أربع
 قوائم يكون مقدار مجموع زوايا المضلعات $4e = 20$ مساوياً لأربعة أمثال
 الزوايا المجسمة على حاصل ضرب عددها في أربعة وهو $4s = 16$ ثم يكون ضعف
 اضلاع $2e = 10$ الخ قدر أربعة أمثال عدد الحروف $2a = 20$ مقدار $2 + 2a = 22$
 لأن الحرف الواحد ضلع مشترك لوجهين فإذا $4s = 16$ $s = 4$ $e = 5$ $a = 10$
 فإذا أخذ ربع هذا القدر يكون $2 = s - 1 + e$ ومن ثمة ثبت المطلوب
 من أن يكون $s + e = 2 + 2a$

نتيجة لقد تبين من هذه الدعوى أن مجموع الزوايا المسطحة التي تحيط بالزوايا
 المجسمة تحتوي على القوائم الأربع بقدر ما في $s - 2$ من الأضلاع وانما
 جاءت s لاجل اظهار ما بين عدد الزوايا المجسمة من كثير السطوح
 لأنه إذا نظرنا إلى أحد وجوه الجسم الذي عدد اضلاعه e وجدت مجموع زواياه
 $2s - 2$ زوايا قوائم (مقاله ١) لكن حيث أن مجموع مقادير $2s - 2$ اضعف
 عدد اضلاع سائر الوجوه $2e = 2 + 2a$ وان الحاصل من أخذ الوجوه $2e$ مرات

٤ = ح فكان مقدار مجموع الزوايا من كافة الوجوه ١٤ - ٤ ح ومن كون
 ١ - ح = ٣ - ح على ما صرح به آنفاً من هذه الدعوى فتكون
 ١٤ - ٤ ح = ٤ (٣ - ح) فهذا مقدار مجموع الزوايا الملتحمة التي تحيط
 بالجسم

(الدعوى السادسة والعشرون النظرية)

(شكل ٢٧٢ و ٢٧٣) اعظم المثلثات الكروية الموضوعية بضلعي ح - و ا ح
 المعلومين وثالث على اي وجه * مثلث ا - ح الذي تكون زاويته ح المصورة
 بين الضلعين المعلومين مساوية لمجموع زاويتي ا و - الاخرين فليتمد ضلعاً
 ا ح و ا - حتى يلتقي في نقطة د يحدث ح - د المثلث الكروي تكون زاوية
 ح - د مساوية لمجموع زاويتي ح - د و - د الاخرين * لان مجموع زاويتي
 ح - د + ح - د مساو لثانيتين وكذا مجموع زاويتي ح - ا + ح - د
 فلذا يصير ح - د + ح - د = ح - ا + ح - د فاذا ضمت زاويتا
 ح - د و - ا ح للمساويتان لكل من طرفي تلك المعادلة يكون ح - د +
 ح - ا + ح - د = ح - د + ح - ا + ح - د + ح - د ولقد فرض كون
 ح - د = ح - ا + ح - د فيكون ح - د = ح - د + ح - د + ح - د
 فاذا رسم ح - ط على ان يكون ح - ط = ح - د فيصير ح - د =
 ح - د ومن كون مثلثي ح - ط و ح - د متساويي الساقين كان ح - ط
 = ح - د وتقع نقطة ط في وسط ح - د وتكون على ابعاد
 متساوية من نقطتي ح و - د الثلاث وكذلك ثبت ان نقطة ع وسط
 خط ا - ب تكون على ابعاد متساوية من نقطتي ا و - د الثلاث

(شكل ٢٧٢) الآن اذا كان ح - ا = ح - د وزاوية ح - ا < ح - د
 ووصل ا - ب وايضاً اذا امتد قوساً ا ح و ا - ح حتى التقي في نقطة د فقوس
 ح - ا يصير نصف محيط وكذا قوس ح - د وحيث ان ح - ا = ح - د ايضاً
 يكون ح - د = ح - د لكن في مثلث ح - ط د ضلع ح - ط + ح - د < ح - د

البرهان على ان زاوية ط ر ح اكبر من ط ر د ومن ثمة كانت مساحة
مثلث أ ر ح اصغر من أ ر د

(شكل ٢٧٣) اذا اخذ قوس د أ = ح ا وانشتت زاوية أ د ر >
ر ح ا كذلك يكون البرهان وما نتج منه ولا يخفاه ومن أجل ذلك ثبت المطلوب من
ان يكون مثلث أ ر د اعظم جميع المثلثات التي رسمت بضلعين معلومين قد
اخذنا لهما كيفما اراد

* (تنبيه ١) * (شكل ٢٤١) مثلث أ ر د قابل الرسم بضلعي د ا و ر د -
المعلومين في نصف الدائرة التي قطرها وتر أ ر الضلع الثالث يكون اعظم
المثلثات * لانه اذا كانت نقطة ع وسط ضلع أ ر لم تزل ترى التساوي بين
بعدي ع ح و ع ر فلذا كان محيط الدائرة المرسومة بانقراج ع ح ونقطة ع
قطبها يمر بنقط أ و ر الثلاث فضلا عن ان يكون مستقيما س ا قطرها *
حيث ان ذلك المركز يوجد في مستوى الدائرة الصغيرة وفي مستوى دائرة
ر ع ا العظيمة معا (نتيجة ٤ دعوى ١) نوجب وجوده فوق أ ر الفصل
المشترك بينهما وبذلك صار أ ر المرقوم قطرا

* (تنبيه ٢) * حيث كانت زاوية ح في مثلث أ ر د مساوية لمجموع زاويتي أ و ر -
تبين ان مجموع الزوايا الثلاث منه يساوي ضعف زاوية د لكن ثبت ان
هذا المجموع لا يزال اكبر من قائمتين فكانت زاوية د اكبر من قائمة
* (تنبيه ٣) * اذا امتد ضلعا د ا و ر حتى التقيا في نقطة ه فمثلث س ا ه
يساوي ربع سطح الكرة * لان زاوية ه = د = أ ر د + د ا ر فلذا كان
مجموع الزوايا الثلاث من مثلث س ا ه يقاوم زاويا أ ر د و ا ر ه و د ا ر و
س ا ه الاربعة التي مجموعها يساوي اربع قوائم ومن ثمة كان سطح مثلث س ا ه
= ٤ - ٢ = ٢ اعني ربع سطح الكرة

* (تنبيه ٤) * اذا كان مجموع الضلعين د ا و ر المعلومين مساويا لنصف محيط
الدائرة العظيمة او اكبر منها فلا عظم فيه * لان مثلث أ ر ح يجب رسمه في نصف

محيط دائرة من الكرة ولا يكون مجموع ضلعي α و β اصغر من نصف محيط γ فكان مجموعهما اصغر من نصف محيط دائرة عظيمة .
ويميل على عدم الاعظمية انه اذا كان مجموع الضلعين المعلومين اكبر من نصف محيط دائرة عظيمة فلا يزال ذلك المثلث يكبر حتى تصير الزاوية التي بين الضلعين المعلومين قدر قائمتين والاضلاع الثلاثة من المثلث تصير على مستقيم واحد فيؤول المثلث الى سطح نصف الكرة وحينئذ يخرج عن هيئة التمثيل وهذا اكبر دليل على ما ذكر .

* (الدعوى السابعة والعشرون النظرية) *

اعظم المثلثات الكروية المرسومة بضع معلوم واطراف متساوية معينة ما كان ضلعاها الغير المعينين متساويين

(شكل ٢٤٢) مثلا اذا اشترك ضلع α المعين في مثلثي $\alpha\beta\gamma$ و $\alpha\delta\epsilon$ وكان $\alpha\beta + \alpha\delta = \gamma + \epsilon$ اقول ان المثلث الذي فيه $\alpha\delta$ $= \gamma$ وهو $\alpha\delta\epsilon$ المتساوي السابقين اعظم من مثلث $\alpha\beta\gamma$ ما ليس بتساوي السابقين

لانه متى اشترك جزء $\alpha\epsilon$ بينهما فحسب ان يكون مثلث $\alpha\delta\epsilon$ اصغر من مثلث $\alpha\beta\gamma$ ومن كون زاوية δ ا مساوية لزاوية β ا اكبر من زاوية ϵ ا ف يكون ضلع $\alpha\epsilon$ اكبر من ضلع $\alpha\delta$ (٢١) ثم يؤخذ $\epsilon\zeta = \epsilon\delta$ ويرسم $\epsilon\eta = \delta\epsilon$ ويوصل $\eta\zeta$ فنثلث $\epsilon\eta\zeta$ ط يساوي مثلث $\delta\epsilon\zeta$ (١٢)

الآن وجب اثبات كون مثلث $\delta\epsilon\zeta$ ا مساويه $\eta\epsilon\zeta$ ط اصغر من $\alpha\delta\epsilon$ واللازم ان يكون مساويا له او اكبر منه وفي كل حال لم تزل نقطة η بين نقطتي α و ϵ فلزم وقوع نقطة η على امتداد خط $\alpha\delta$ والا فاقول حيث احتوى مثلث $\alpha\delta\epsilon$ على مثلث $\epsilon\eta\zeta$ وخط $\alpha\delta$ اقرب بعدد بين نقطتي α و δ كان $\delta\epsilon + \epsilon\eta + \eta\zeta < \alpha\delta$ لكن من كون $\delta\epsilon\zeta = \epsilon\delta\epsilon$ $\delta\epsilon + \epsilon\eta + \eta\zeta = \alpha\delta$ و $\alpha\delta = \delta\epsilon + \epsilon\eta + \eta\zeta$ فصار $\delta\epsilon + \epsilon\eta + \eta\zeta = \alpha\delta$

$\angle ع + \angle ع - \angle ع + \angle ع < \angle د$ واختصارا $\angle د - \angle ع + \angle ع + \angle ع < \angle د$ او اذا نقلت $\angle د$ يصير $\angle د + \angle ع < \angle د + \angle ع$ ومن ثمة لا يمكن ان تقع نقطة $و$ الاعلى امتداد $ح ع$ بين نقطتيه $ح$ و $ع$ فلذا ظهر ان مثلث $و ع ط$ او مساويه $ع د ر$ اصغر من مثلث $ا ع د$ وثبت المطلوب من ان يكون مثلث $ا د ح$ المتساوي الساقين اكبر من $ا د ر$ الغير المتساوي الساقين

* (تنبيه) * لاجرم ان ماذ كرفي هاتين الاخيرتين يشابه ماذ كرفي الاولى والثانية من ملحقات الرابعة وحيث ان المضلعات الكروية تجرى مجرى المضلعات المستقيمة الاضلاع بكل وجهه ساذ كر اوضاعها

اولان جميع المضلعات الكروية المتساوية الاطراف المتحدة الاضلاع عددا اعظمها متساوت اضلاعه قدر او برهانه ثابت في الثانية من ملحقات الرابعة

ثانيا لمان جميع المضلعات الكروية المرسومة باضلاع معلومة سوى ضلع اخير يؤخذ كباير اذ اعظمها ما يمكن رسمه في نصف الدائرة التي يكون وترا الضلع الاخير المرقوم قطرا لها وبرهانه قد ذكر في الدعوى الرابعة من ملحقات المقالة الرابعة استقبا طامن (٢٦) وشرط وجود عظمه ان يكون مجموع الاضلاع المعلومة اصغر من نصف محيط دائرة عظيمة

ثالثا اعظم المضلعات الكروية ما يمكن رسمه داخل محيط دائرة من دوائر الكرة وقد ذكر برهانه في الدعوى السادسة من ملحقات المقالة الرابعة

رابعا اعظم المضلعات الكروية المتحدة الاضلاع عدد المتساوية الاطراف قدرا ما تساوت اضلاعه وزواياه معا

وحسب اني برهانه ماذ كرفي النتيجة الاولى والثانية فتأمل اعلم ان ماذ كر بخصوص اعظم المضلعات الكروية تجرى في الزوايا المجسمة التي هي مقدارات تلك المضلعات تمت بحسن توفيقه

بيان ملحقات السادسة والسابعة بيان الاشكال كثيرة القواعد المنتظمة

(الدعوى الاولى النظرية)

الاجسام الكثيرة القواعد المنتظمة خمسة فقط لا منتظم سواها
وذلك ان جميع الوجود في الكثير القواعد المنتظم اشكال مستقيمة الاضلاع
منتظمة وكانت الزوايا المجسمة، تساوية كما شرح به في التعاريف والحدود
مما هو شرط الابد منه في صحة الانتظام فقد تبين انه لا توجد هذه الشروط الا فيما
ذكر من كثير القواعد قليلة العدد

تقولوا اذا كانت وجوه كثير القواعد المنتظم من مثل، تساوي الاضلاع
فشكل زاوية مجسمة منه اما ان تصور بثلاث زوايا واربع او خمس من زوايا
تلك المثلثات ويتفرع من ذلك ثلاث اجسام منتظمة ذوا ربعة قواعد وذو خماني
قواعد وذو عشرين قاعدة وهذه الاجسام قد اشتهرت بالاشكال المنتظمة
الافلاطونية فلا يوجد غير هذه الثلاثة المذكورة من منتظم يحاط بمثلثات
مقساوية الاضلاع اصل الان ست زوايا من شكل ذلك المثلث تكافي اربع قوائم
وبها يتبع انشاء المجسمة (٢١ مقالة ٥)

فانيا اذا كانت الوجوه مربعة وحيث لا تتركب المجسمة الا من ثلاث الزوايا منه
فبذلك يحصل ذوات قواعد في المكعب لا غيره لان تركيب المجسمة من زواياه
الاربعة يمنع لان ذلك يساوي اربع قوائم

والثا واخيرا اذا كان وجهه مجسما منتظما فالمجسمة منه لا تتركب الا من ثلاث
الزوايا منه فيحصل المنتظم ذو الاتني عشرة قاعدة فقط

لا منتظم غير هذه الخمسة المرقومة * لان ثلاث زوايا من المسدس تساوي اربع
قوائم والمسبع ابلغ ومن ثمة لا يمكن احداث المجسمة بها

وثلاثة من تلك الخمسة تحاط بالمثلث المتساوي الاضلاع وواحد بالربيع والاخر

بالخمس كما صرح به

تنبيه اذا علم أحد وجوه المنتظم يمكن تحديد سائر أقسامه وتحقيق الخمسة اجسام
المترقومة وبيان انشائها في هذه الدعوى الآتية
• (الدعوى الثانية العملية) •

• طريق انشاء كثير القواعد المنتظمة اذا علم أحد وجوهه واضلعه فقط

وهذه الدعوى تحل مشكلات تلك الاجسام الخمس على التوالي

• انشاء ذي الاربع قواعد المنتظم

(شكل ٢٤٣) اذا فرض مثلث $ا ب ج$ المتساوي الاضلاع وجهه الى بقاء عمود
ع $س$ على مستوى $ا ب ج$ من نقطة ع مركز المثلث المذكور ويعين هذا
العمود في نقطة $س$ بان يكون $ا س = ب س = ج س$ و $س$ هو الهرم
المطلوب

لان ابعاد ع $ا$ و ع $ب$ و ع $ج$ متساوية فتساوى موائيل $س ا$ و $س ب$ و $س ج$
لتساوى ابعادها من عمود $س$ ع ومن كون $س ا = ا ب$ كانت الوجوه
الاربعة من ذلك الهرم متساوية لمثلث $ا ب ج$ المعلوم وايضا تكون زواياه
المجسمة متساوية التركيب كل واحد منها من ثلاث الزوايا المسطحة المتساوية
وحيث تساوت الوجوه والزوايا المجسمة من هذا الهرم قد صار منتظما وثبت
المطلوب

انشاء ذي الست قواعد المنتظم

(شكل ٢٤٤) اذا كان $ا ب ج د$ مربعاً معلوماً وان شئ من شرفه قائم على قاعدة
 $ا ب ج د$ المترقمة وارفعناه اه مساو اضلاع $ا ب$ وحيث ان وجوده هذا
المشور مربعات متساوية وكل واحد من زواياه المجسمة قد تركبت من ثلاث
الزوايا القوائم فهي ايضا متساوية ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يكون ذلك
المشور منتظماً ذات قواعد المنتظم اي المكعب

انشاء المنتظم ذي الثمان قواعد

(شكل ٢٤٥) اذا كان مثلث $ا ب ج$ متساوي الاضلاع معلوماً ورسم مربع

ا ح د على ضلعه ا ر ويقام عمود ط س من مركز ع على مستوى ذلك المربع وتتبع نهايتاه ط و س بان تكون ع ط = ع س = ا ع ثم اذا وصلت خطوط س ا و س ر و ط ا الخ جسم س ا ح د ط المركب من هري س ا ح د و ط ا ح د الرباعين المتلاصقين المشتركين في قاعدة ا ح د هو المنتظم ذو الثمان قواعد المطلوب ولقيام مثلث ا ع س في نقطة ع وكذا مثلث ا ع د فاضلاع ا ع و ع س و ع د تتساوى فلذا واجب تساوى ذلك المثلثين وبصير ا س = ا د وبذلك ثبت ان يكون كل من مثلثات ا ع ط و ا ع س و ا ح د و ا ح ر و ا ح ط الخ الاخر مساو لمثلث ا ع د اقام الزاوية ومن اجل ذلك تساوى كافة اضلاع ا ر و ا س و ا ط الخ تبين ان جسم س ا ح د ط محيط بثمانية مثلثات متساوية الاضلاع كل واحد منها يساوى مثلث ا س م متساوى الاضلاع المعلوم فضلا عن تساوى جميع الزوايا لمجسمة منه مثلا زاوية س مساوية لزاوية ر

لان يرى التساوى بين مثلثي س ا ح و د ا ح و قيام زاوية ا س ح فشكل س ا ط ح يصير مربعا يساوى مربع ا ح د واذا قدر هرم ر س ح ط بهرم س ا ح د فقد يمكن اذا تطابق قاعدة ا س ح ط من الاول على قاعدة ا ح د من الثاني ولاشتراك مركز ع حينئذ تطابق ارتفاع ع من الاول على ارتفاع س ع من الثاني فوجب الاتحاد التام بين هذين الهرمين ومن ثمة صارت مجسمة س مساوية لمجسمة ر وثبت المطلوب من ان يكون جسم س ا ح د منتظما ذا ثمان قواعد

(تنبيه) * اذا تقاطعت خطوط ا ح و د وسط عماد في اواسطها فنمايات تلك الخطوط الثلاثة تكون رؤسا للمنتظم الارقوم فتأمل
انشاء المنتظم ذي الاثني عشرة قاعدة

(شكل ٢٤٦) اذا كان ا ح د ه مجسما منتظما معلوما وكان كل واحدة من زاويتي ا ر ف و ح ر ف مساويا لزاوية ا ح ر وتشكلت بهذه الزوايا المسطحة زاوية ر المجسمة ونوعين الانحراف بين كل اثنين من تلك

المسطحات الثلاث كما مر في الدعوى الرابعة والعشرين من المقالة الخامسة
ويسمى ذلك الانحراف φ وكذلك اذا جرى العمل بانشاء زوايا مجسمة في
نقط Γ و Δ و Θ و Λ مساوية لزاوية α المجسمة بمستوى Γ و Δ يتحد
بمستوى Γ و Θ لان الانحراف بين كل منهما وبين مستوى Λ و Θ هو عين
مقدار φ فقد امكن اعمال نجس Γ و Δ و Θ و Λ مساويا لخمسة α و Γ و Δ
في مستوى Γ و Δ و Θ و اذا جرى عين هذا العمل في كل من مستويات Γ و Δ
و Θ و Λ الخ الاخر يحصل سطح محذب Γ و Δ و Θ و Λ الخ مركب من ستة
اشكال مجسمة منتظمة متساوية وكل انحراف واقع بين كل متجاورين هو قدر
المعين بمقدار φ

فاذا كان φ و Δ الخ سطحا ثانيا مساوي سطح Γ و Δ الخ فاذا اتى احداهما
بالآخر حدث من هذا الاتصال سطح محذب واحد متوال بلا انفصال مثلا
لاجل تشكيل زاوية φ المساوية لزاوية α المجسمة الاخرى توصـل
زاوية Γ و Δ و Θ و Λ بزاوية Γ و Δ و Θ و Λ و لا يزال الانحراف بين مستويي
 Γ و Δ و Θ و Λ عند الاتصال باقيا بلا تغير

لانه هو الانحراف الذي يلزم عند تشكيل تلك المجسمة لكن عند تشكيل زاوية
 φ المجسمة بنطبق ضلع Γ و Δ على Γ و Δ المساوي له وباجتماع زوايا Γ و Δ
 Γ و Δ و Θ و Λ الثلاث المسطحة ببعضها في نقطة وتشكل زاوية مجسمة مساوية
لكل واحدة من الزوايا المجسمة المرسومة التي تقدمت ويحصل هذا الاتصال من
غير تبديل لاني زاوية φ ولا في سطح Γ و Δ الخ حيث تقدم تلاصق
مستويي Γ و Δ و Θ في نقطة Γ و قد تبين ان الانحراف بينهما
مساو لمقدار φ وكذا ما بين مستويي Δ و Θ و Θ و Λ فاذا جرى العمل
تتابعيا بالاتصال وتوافقا بالتلاصق مثنى بمثل ذلك سطح Γ و Δ و Θ و Λ
لا انفصال فيه ترى انه سطح واحد وهو سطح كثير القواعد المنتظم ذو اثني

عشرة قاعدة لانه مركب من اثني عشر نجما متقاطعا وجميع الزوايا الخمسة فيه متساوية

انشاء المنتظم ذي العشرين قاعدة

(شكل ٢٤٧) اذا كان مثلث ABC المتساوي الاضلاع أحد وجوهه
اولا تنشأ زاوية بمجموعة بخمس مستويات تؤخذ وكل واحد منها مساويا لمستوى
 ABC بان تكون الانحرافات التي بين كل مستوي ومجاوره متساوية ولاجل اجراء
ذلك يرسم مخمس $ABCDE$ على ضلع BC المتساوي اضلاع ABC ويقام
عمود من مركزه على مستوي ABC ويتعين هذا العمود في نقطة A على ان يكون
 $AB = AC = AD = AE$ فاذا وصل خط AB و AC و AD و AE فزاوية A الخمسة
المحاطة بزوايا ABC و ACD و ADE و BAE الخمسة المسطحة هي الخمسة المطلوبة * لان
مواثل ABC و ACD و ADE و BAE متساوية ومماثل ABC مساوي ضلع BC مثلثات
 ABC و ACD و ADE و BAE تكون متساوية و AB كل يساوي مواثل ABC
المقروض

ويرى ان الانحرافات بين كل مستوي ومجاوره من مستويات ABC و ACD و ADE و BAE الخمسة
متساوية لان زوايا ABC و ACD و ADE و BAE الخمسة متساوية * حيث تركبت كل واحدة
منها من أحد زوايا الخمس المنتظم ومثل زوايا المثلث المتساوي الاضلاع
فاذا سمى الانحراف المستويين المتساويين الزوايا ABC وتعين بما ذكر في الدعوى
الرابعة والعشرين من المقالة الخامسة حيث ان زاوية ABC تكون هي الانحراف
من كل مستوي على صاحبه من المستويات التي تحيط بزوايا A الخمسة فاذا
علمت ما ذكرنا وان شئت مجسمات في نقاط A و B و C و D و E الثلاث كل واحدة منها
متساوية لخمسة A فيحدث دهور الخمس سطح محدد تركب من عشر مثلثات
متساوية الاضلاع ميل كل واحد منها على صاحبه يساوي مقدار ABC و ACD و ADE و BAE
الخ زوايا دورته فجمع مرة من مثلثي ومرة اخرى من مثلث زوايا المثلث المتساوي

الاضلاع

فإذا تصور مجسم ثنائى يساوى مجسم دهور الخ ووضع احدهما على الآخر
اصفا بان تأتى ذات المثلث من احدهما على ذات المثلث من الآخر بحيث
ان الانحراف بين كل مجاورين من تلك المستويات الذى هو ϕ يوافق الزاوية
المجسمة ذات الوجوه الخمس المساوية لزاوية α فن هذا الاصاق الواقع من
غير تبديل ولا تغيير يحدث سطح مجسم متوال لافطوريه مركب من عشرين
مثلا متساوية الاضلاع وهو سطح كثير القواعد المنتظم ذي العشرين قاعدة
وجميع زواياه المجسمة تكون متساوية

* (الدعوى الثالثة العملية) *

طريق وجود الانحراف بين الوجهين المتجاورين من منتظم كثير القواعد
هذا ينتج من الاعمال السابقة فى الاشكال الخمسة الافلاطونية المتقدمة مع
ما صرح به فى الدعوى الرابعة والعشرين من المقالة الخامسة وهو ان تعين
الزاوية بين المستويين من زاوية مجسمة وزواياها المسطحة الثلاث معلومة
(شكل ٢٤٣) تتشكل المجسمة من ذى اربع قواعد بثلاث زوايا مثلثات متساوى
الاضلاع فعلى ما صرح به فى الرابعة والعشرين المرقومة تستخرج الزاوية التى
بين المسطحات وبذلك يصير استنتاج ذلك الانحراف

(شكل ٢٤٤) الزاوية المجسمة الواقعة بين المتجاورين فى ذى ستة قواعد قائمة
(شكل ٢٤٥) الزاوية المجسمة فى ذى ثمان قواعد حيث تشكلت من زوايا
المثلث المتساوى الاضلاع وقائمة فالانحراف بين زوايا المثلث هو انحراف
وجهى الجسم المذكور

(شكل ٢٤٦) حيث تشكلت المجسمة فى ذى اثنتى عشرة قاعدة من ثلاث
زوايا الخمس المنتظم فالانحراف بين كل اثنتين منها هو انحراف وجهى
الجسم المرقوم

(شكل ٢٤٧) حيث تشكلت الزاوية المجسمة فى ذى عشرين قاعدة من مثلث
زوايا المثلث المتساوى الاضلاع واحاد زوايا الخمس فالانحراف بين زوايا

الثالث هو انحراف وجهي الجسم المرقوم

(الدعوى الرابعة العمالية)

باربقي استخراج نصف قطر الكرة المرسومة داخل كثير القواعد المنتظم ونصف

الكرة المرسومة عليه وضاعفه معلوم

اولا لاثبات ان كل منتظم كثير القواعد يمكن رسمه داخل الكرة

وخارجها

(شكل ٢٤٨) اذا كان a ضلعاً مشتركاً بين وجهي كثير القواعد المنتظم

و h هو مركزي ذينك الوجهين فعمود h و o هما النازلان من المراكزين

على ضلع a المشترك يلتقيان وتقع في نقطة e وسطه وتحدث زاوية بين

هذين العمودين مساوية لانحراف السطحين المتجاورين المعينين كما ذكر

في الدعوى العمالية السابقة فاذا أخرج عمود h و o من غير تحديد

على h و o في مستوى h فملتقيان في نقطة e وهي مركز الكرة

المرسومة داخلها وخارجاً ونصف قطر الاولى h ونصف قطر الثانية o

ولتساوي h و o وهو ما البعد بين المراكزين واشترك وتر h و o

التساوي بين مثلثي h و o قائمي الزاوية (مقالة ١٨) فعمود h

يساوي عمود o ومن حيث ان ضلع a عمود على مستوى h

فمستوى a عمود على مستوى h وهو أيضاً عمود عليه (مقالة ٥)

و لكون خط h في مستوى h عموداً على h فصل مشترك

مستوي h و a فهو عمود على مستوى a (١٨ مقالة)

وكذلك يصير خط h عموداً على مستوى a فنعلم ان عمودي

h و o الخارجين في مستويي الوجهين المتجاورين من مركزيهما

يلتقيان في نقطة e ويكونان متساويين *

الآن اذا جعلت وجهي a و a المتجاورين أي وجهي المنتظم

فلا يزال h بعد المركز على ما هو عليه من الكبر وكذا زاوية h نصف

زاوية h ومن أجل هذا تساوي مثلث h وضاعفه h في جميع

وجوه كثيرا القواعد
فعلى هذا إذا رسمت كرة نصف قطرها $ع$ و مركزها $ع$ فتمر بجميع
مراكز وجوه كثيرا القواعد على طريق القياس (لأن مستوي $ا ح$ و $ا هـ$
عمودان على ثمانية نصف القطر) وتلك الكرة هي المرسومة داخل كثيرا القواعد
أو كثيرا القواعد هو المرسوم عليها فإذا وصل ما تلا $ع$ و $ع$ ر يكونان
متساويين لأن ارتفاعهما عن العمود متساويين الابعاد حيث كان $ا ح = ح ر$
وكذا كل خطين مائتين بصلان من مركز $ع$ الى ثمانية ضلع متا

جميع تلك الموائيل متساوية فإذا جعلت $ع$ مركزا ورسم سطح كرة بنصف قطر
 $ع$ ا فهذا السطح يمر بجميع رؤس زوايا كثيرا القواعد والكرة هي المرسومة
فوق المنتظم ويقال له المرسوم داخل الكرة فإذا علمت ذلك فلا عسر في اجراء
العمل من تلك الدعوى كما سياتي

ثانيا (شكل ٢٤٩) إذا علم أحد اضلاع وجه من كثيرا القواعد ورسم ذلك الوجه
وبعد المركز فيه $هـ$ فيستخرج الانحراف بين الوجهين المتجاورين من كثيرا
القواعد كما صرح به في الدعوى التي تقدمت وتنشأ زاوية $هـ د هـ$ مساوية له
ويؤخذ $هـ د$ مساويا لخط $هـ ر$ ويقام عمود $ح ر$ و $هـ د$ على $هـ د$ و $هـ ر$
فهذان العمودان يلتقيان في نقطة $ع$ و $ح ر$ يكون هو نصف قطر الكرة
المرسومة داخل كثيرا القواعد فإذا أخذ $ا ح$ مساويا لنصف قطر الدائرة
المرسومة فوق وجه من وجوه كثيرا القواعد على استقامة $هـ د$ الخارج يكون
 $ع$ ا هو نصف قطر الكرة المرسومة على المنتظم

لأن مثلثي $هـ د ع$ و $ا ح ع$ قائمي الزاوية المذكورين في الشكل ٢٤٩ هما
عين المرقومين في الشكل ٢٤٨ فضلا عن ان يكون خطا $هـ د$ و $ا ح$ نصفي قطر
للدائرة المرسومة في احد وجوه كثيرا القواعد و المرسومة عليه وان يكون
 $ع ح$ و $ع ا$ نصفي قطر للكرتين المرسومتين داخل المنتظم وخارجه
* (تنبية) * قد استخرج من الدعوى التي تقدمت نتائج

أولاً انه يمكن تقسيم كل منتظم الى اهرام متساوية مشتركة رؤسها في نقطة هي

مركز المنتظم فضلا عن كونها مركز الكرة المرسومة داخله وخارجه
ثانياً ان مساحة كثير القواعد المنتظم مساوية لحاصل ضرب سطحه في ثلث
نصف قطر الكرة المرسومة داخله

ثالثاً ان كثيرى القواعد المنتظمين متحد الاسم يسعيان جسمين متشابهين
وتتناسب اضلاعهما التناظرة تناسباً بين انصاف اقطار الكرات المرسومة
داخلهما وخارجهما كالتسوية بين اضلاعهما

رابعاً انه اذا رسم جسم كثير القواعد منتظم داخل الكرة فالمستويات المرسومة
من مركزه بطول اضلاعه المتعددة تقسم سطح الكرة الى مضلعات متساوية
متشابهة بعدد وجوه المنتظم ولله الحمد والمنة على كل حال والصلوة والسلام على
سيدنا محمد وآله ودور الالهة وبه ثقى

(المقالة الثامنة)

في الاجسام المستديرة الثلاث

المحدود

١ (شكل ٢٥٠) الجسم الحاصل من دوران مستطيل نحو احد حوله ضلعه a - الثابت يسمى اسطوانة وفي هذه الحركة لا يزال ضلعا a و b عمودين على a ويرسمان دائرتي c و f و c و f المتساويتين وتسميان قاعدتي الاسطوانة وضلع c يرسم السطح المحدب وضلع a الثابت يسمى محور الاسطوانة

كافة المقاطع المنشأة عمدا على المحور نحو b لم هي دوائر وكل واحدة منها تساوي القاعدة لانه هي دور مستطيل a - b حول ضلع a - b فخط $ط$ العمود عليه يرسم مستويا محيطيا يساوي القاعدة وما هو الا المقطع المنشأ عمدا على المحور في نقطة $ط$

كافة المقاطع المنشأة تبعا للمحور نحو f و c يكون ضعف a - b المستطيل الاصل

٢ (شكل ٢٥١) الجسم الحادث من دوران مثلث $س$ - $ا$ - $ب$ القائم الزاوية حول ضلعه الثابت $س$ - $ا$ يسمى مخروطا ويرسم ضلع $ا$ - $ب$ مستويا محيطيا أعني دائرة تسمى قاعدة المخروط ووتر $س$ - $ب$ يرسم سطحه المحدب فنقطة $س$ تسمى رأس المخروط وخط $س$ - $ا$ محور المخروط او ارتفاعه وخط $س$ - $ب$ يسمى ضلعا أو خطا او اصلا

المقطع المنشأ عمدا على المحور نحو $ح$ و $ط$ دائرة * والمقطع المنشأ تبعا للمحور نحو $م$ - $ث$ $س$ - $ا$ - $ب$ فهو ضعف $م$ - $ث$ $س$ - $ا$ - $ب$ الاصل

٣ اذا طرح مخروط $س$ - $ب$ و $ح$ من مخروط $س$ - $ب$ بقطع $ب$ و $ا$

قاعدته فالجسم الباقي اعني $ح - ع$ و يسمى مخروطا ناقصا وهو ما يحصل من دوران شبه منحرف $ا ب ح د$ القائم الزاويتين $ا$ و $د$ حول ضلع $ا د$ الثابت نقط $ا د$ المرقوم يسمى محور المخروط الناقص أو ارتفاعه ودائرتا $س د$ و $ح و$ قسمى قاعدتي المخروط الناقص ونقط $س ح$ يسمى ضلع المخروط

٤ الاسطوانتان أو المخروطان المتشابهان هما ما كانت النسبة بين محوريهما كالنسبة بين نصفي قطري قاعدتيهما

٥ (شكل ٢٥٢) اذا رسم مستقيم الاضلاع $ا ب ح د$ داخل دائرة $ا د$ قاعدة الاسطوانة واقم منشور قائم على تلك القاعدة بقدر ارتفاع الاسطوانة فيقال له المنشور المرسوم داخل الاسطوانة ويقال لها الاسطوانة المرسومة على المنشور

وحيث ان حروف $ا د و س ر و ح$ الخ من المنشور عماد على مستوى القاعدة فهي منجصرة في السطح المحدد من الاسطوانة فلذا كان المنشور مماسا للاسطوانة بحروفه

٦ (شكل ٢٥٣) وايضا اذا رسم شكل $ا ب ح د$ مستقيم الاضلاع على قاعدة الاسطوانة واقم منه منشور قائم بقدر ارتفاع الاسطوانة فيقال له المنشور المرسوم على الاسطوانة ويقال لها الاسطوانة المرسومة داخل المنشور

اذا كانت $م و$ الخ نقط تماس لاضلاع $ا ب و س ح$ الخ واقم من تلك النقط عماد $م س و ه$ الخ على مستوى القاعدة فهذه العمود توجد في سطح الاسطوانة وفي سطح المنشور المرسوم عليها معا فلذا كانت تلك الاعدة خطوط تماس بينهما اعلم ان الاسطوانة والمخروط والكرة هي الاجسام المدورة الثلاث المتعارفة في اصول الهندسة

* (فوائد مقدمة على السطوح) *

الفائدة ١

(شكل ٢٥٤) سطح $ع ا ب د$ المستوى المحدود بدور $ا ب د$ اصغر من

كل سطح سواء يكون محدودا به نحو ف ا ر ح د
وذلك لاختفاء نفسه حيث أنه من قبيل العلوم المتعارفة لأنه يجري مجرى الخط
المستقيم بين سائر الخطوط من حيث أنه أصغر بعد بين النقطتين فالسطوح
المستديرة على دور واحد أصغرهما ما كان مستويا وانما تقليل العلوم المتعارفة
من خصائص علم الهندسة

وسند كراتيات هذه القضية بما كدوجه حتى لا يبق الى الشبهة مجال فتقول
السطح امتداد قد امتد طولاً وعرضاً فلا يكون أكبر من سطح آخر الا اذا كانت
جميع اجزاء امتداده أكبر من اجزاء امتداد ما هو أكبر منه ومضى كان اجزاء
سطح أصغر من اجزاء الآخر من كل الوجوه فلا جرم انه يكون أصغر منه فاذا
مر بمستوى ترفى من أى جهة على ان يقطع السطح المستوى فى ر د
والآخر فى ر ف د فلا يزال ر د المستقيم أصغر من خط ر ف د فلذاتين
ان مستوى ر ح ا ر ح د أصغر من سطح ف ا ر ح د ذى الفجوات
القليلة ٢

(شكل ٢٠٥) سطح ر ح ا ر ح د المحدب المحدود بدور ا ر ح د المحيط أصغر
من كل سطح آخر محدود به محيط
والمراد من المحدب ما لا يقطعه المستقيم الا فى نقطتين اثنتين فقط فكرر هذا وان
كان سبق ذكره انما يمكن تطبيق الخط المستقيم على سطح محدب فى بعض الجهات
كالم الانطباق وتلك الامثلة لا توجد الا فى الاسطوانة والمخروط والتسمية بالمحدب
لم تكن مخصوصة بالسطح المنحنى فقط بل تعم سطوح كثير السطوح ومازك من
سطوح مستوية وما كانت سطوحه أو بعض اجزائه سطحاً منحنياً والآخر
كثير السطوح

فأقول ان لم يكن سطح ر ح ا ر ح د أصغر من كل سطح يحيط به وكان الاصغرو
سطح ف ا ر ح د وكان فى النهاية يساوى سطح ر ح ا ر ح د ومر بمستوى على
أن لا يقطع سطح ر ح ا ر ح د بل يمسه فى نقطة ع فقط فهذا المستوى يلاق
مستوى ف ا ر ح د والقسم الذى فصل منه يكون أصغر من المستوى الفاصل

(قائدة ١) فيبقى ما بقى من سطح F اس $د$ ويؤخذ المستوى الفاصل بدلا من القسم المنفصل فالسطح الحاصل من الباقي والبطل لا يزال محيطا بسطح E اس $د$ وأصغر من سطح F اس $د$ ولقد فرض انه هو الأصغر من كل ما عداه فالفرض باطل فلذا ثبت المطلوب من أن يكون سطح E اس $د$ المحدث أصغر من كل سطح محيط به مسند على دوره اس $د$ أى محدودا به ومنتهيا اليه * (تنبية) * (شكل ٢٥٦) وكذا تثبت به بادلة مشابهة لمثل هذا البرهان المرقوم فيقول أولًا إذا كان السطح المحدث محدودا بدوري اس $د$ ومحدود بالسطح الاخر محدودا به أيضا وكان محيطا بالمحاط أصغرهما

ثانيا إذا كان سطح اس المحدث محيطا من كل جهة بسطح م $د$ الاخر فالمحاط أصغر سواء كان بينهما نقط مشتركة أو خطوط أو سطوح أو لم يوجد لانه لا يوجد هنا ما هو أصغر من الجميع سوى ما ذكر حيث يمكن رؤيته مستويا $د$ مما سألنا ذلك المحدث في كل حال وهذا المستوى أصغر من سطح م $د$ (قائدة ١) وحيث كان سطح م $د$ أصغر من سطح م $د$ وهذا بخلاف أن يفرض سطح م $د$ أصغر من الجميع فقد تبين أن سطح اس المحدث المحيط أصغر مما أحاط به * (الدعوى الاولى النظرية) *

مساحة جسم الاسطوانة مساو لحاصل ضرب قاعدتها في الارتفاع (شكل ٢٥٨) اذا كان $ا$ نصف قطر قاعدة اسطوانة معلومة و $ع$ ارتفاعها وجعل لقطر سطح $ا$ علما لسطح الدائرة التي نصف قطرها $ا$ فالمساحة الجسمية من الاسطوانة تكون سطح $ا$ \times $ع$ لانه لو لم يكن سطح $ا$ \times $ع$ مساحة جسمية لها لكان مساحة لاسطوانة أكبر أو أصغر منها * فنقول اولًا لو فرض انه مساحة لاسطوانة اصغر منها كالاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها $د$ وارتفاعها ايضا $ع$ ورسم فوق الدائرة التي نصف قطرها $د$ كثير الاضلاع و $ع$ طرف المنتظم بحيث لا تلتقي اضلاعه بمحيط الدائرة التي نصف قطرها $ا$ (١٠ مقالة ٤) ثم تصور انسام منشور قائم قاعدته و $ع$ طرف كثير الاضلاع وارتفاعه $ع$ فهذا

المنشور هو ما كان مرسوما فوق الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها δ مساحته الجسمية تساوي حاصل ضرب قاعدته δ ع طاف في ارتفاعه ϵ (١٤ مقالة ٦) فالمساحة الجسمية من هذا المنشور تكون أصغر من سطح $\delta \times \epsilon$ لكون قاعدته δ ع طاف أصغر من الدائرة التي نصف قطرها δ مع اتحاد الارتفاع فيها. لكن قد فرض ان سطح $\delta \times \epsilon$ ع مساحة للاسطوانة التي داخل المنشور فعلى هذا لزم ان يكون المنشور أصغر من الاسطوانة التي أحاط بها وهذا كبر محال

لان الاسطوانة مرسومة داخل المنشور وهو محتو عليها فلا يكون الا أكبر منها فاستحال ان يكون حاصل سطح $\delta \times \epsilon$ ع مساحة للاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها δ ع وارتفاعها ϵ وعلى العموم ولا كذا الوجهه ان حاصل ضرب قاعدة الاسطوانة في ارتفاعها لا يمكن ان يكون مساحة جسمية لاسطوانة أصغر منها

ثانيا ان ذلك الحاصل عينه لا يكون مساحة لاسطوانة أكبر من تلك الاسطوانة أصلا

لانه لو فرض δ ع نصف قطر قاعدة الاسطوانة المعلومة اختراعا عن كثرة الاشكال وأنه يمكن جعل حاصل سطح $\delta \times \epsilon$ ع مساحة جسمية لاسطوانة أكبر منها * كالاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها δ ع وارتفاعها ϵ ثم أجرى العمل كما في الشق الاول فمساحة المنشور المشكل فوق الاسطوانة المعلومة تكون $\delta \times \epsilon$ ع ومن كون شكل δ ع طاف أكبر من الدائرة التي نصف قطرها δ ع فالمساحة الجسمية من المنشور تكون أكبر من حاصل سطح $\delta \times \epsilon$ ع وقد فرض مساحة للاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها δ ع وارتفاعها ϵ فلزم ان يكون المنشور أكبر من الاسطوانة التي أحاطت به وهو محال ولا جرم انه أصغر منها ومن ثمة تبين انه لا يمكن ان يكون حاصل ضرب قاعدة اسطوانة في ارتفاعها مساحة جسمية لاسطوانة أكبر منها والمعنى انه قد ثبت المطلوب من ان تكون المساحة الجسمية من الاسطوانة تساوي

حاصل ضرب قاعدتها في ارتفاعها

(نتيجة ١) الاسطوانات المتحدة الارتفاع النسبة بينها كالنسبة بين قواعدها والنسبة بين متحدات القواعد كالنسبة بين ارتفاعاتها

(نتيجة ٢) النسبة بين الاسطوانات المتشابهة كالنسبة بين مكعبات ارتفاعاتها أو كالنسبة بين مكعبات اقطار قواعدها * لان نسبة القواعد الى بعضها كنسبة مربعات الاقطار الى بعضها وحيث تشابهت الاسطوانات كانت النسبة بين اقطار قواعدها كالنسبة بين ارتفاعاتها (١-٢) فلذا كانت نسبة للقواعد كنسبة مربعات الارتفاعات ومن ثمة تبين ان تكون نسبة حواصل ضرب القواعد في الارتفاعات أو نسبة نفس الاسطوانات كنسبة مكعبات ارتفاعاتها

تنبيهه اذا كان نصف قطر قاعدة الاسطوانة r وارتفاعها h فمساحة

قاعدة الاسطوانة πr^2 (١٢-١٣) والمساحة الجسمية لها $\pi r^2 h$

أو $\pi r^2 h$

(الدعوى الثانية القائدة)

السطح المحدب من المنشور القائم يساوي حاصل ضرب محيط قاعدته في ارتفاعه (شكل ٢٥٢) لان هذا السطح مساو لمجموع مستطيلات AD و DE و EC التي تركب منها حيث ان AD و DE و EC هي ارتفاعات تلك المستطيلات مساوية لارتفاع المنشور ومجموع قواعدها كافة AD و DE و EC هي اضلاع قاعدة المنشور فقد تبين ان مجموع المستطيلات أو السطح المحدب من المنشور القائم مساو لحاصل ضرب محيط قاعدته في ارتفاعه

(نتيجة) اذا اُخذ الارتفاع في المنشورين القائمين فالنسبة بين محديهما كالنسبة بين محيطي قاعدتهما

(الدعوى الثالثة القائدة)

السطح المحدب من الاسطوانة اكبر من كل محدب منشور راسم داخلها واضغر

من كل محدب المنشور رسم خارجها

(شكل ٢٥٢) لان الطول في محدب الاسطوانة ومحدب منشور $أر د هـ$ هو المرسوم داخلها واحده حيث ان المقاطع المنشأة فيهما الموازية لحرف او مساوية له ولاجل تقدير عرضهما اقول اذا قطعنا بسطوح مستوية توازي مستوى القاعدة وتكون عمدا على حرف او فاحدهذين المقطعين يساوي محيط القاعدة والاخر يساوي دور كثير الاضلاع $أر د هـ$ وحيث ان عرض سطح الاسطوانة اكبر من عرض سطح المنشور مع اتحاد الطول فيهما تبين ان يكون السطح الاول اكبر من الثاني

(شكل ٢٥٣) وبمثل ما تقدم من الادلة والبراهين يثبت ان يكون السطح المحدب من الاسطوانة اصغر من سطح محدب منشور $ر د هـ$ ل ح المرسوم خارجها
 * (الدعوى الرابعة النظرية) *

السطح المحدب من الاسطوانة مساو لمحصل ضرب محيط قاعدتها في ارتفاعها (شكل ٢٥٨) اذا كان نصف قطر قاعدة الاسطوانة المنروضة $أ$ وارتفاعها $ع$ وجعل لفظ محيط $أ$ علما على محيط الدائرة التي نصف قطرها $أ$ لمساحة محدب الاسطوانة يكون محيط $أ$ \times $ع$

لانه ان لم يكن كذلك لزم ان يكون حاصل محيط $أ$ \times $ع$ مساحة لمحدب اسطوانة اكبر واصغر منها فنقول اولاً اذا فرض انه مساحة لمحدب اسطوانة اصغر منها أى لمحدب الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها $د$ وارتفاعها ايضا $ع$ يرسم كثيرا لاضلاع المنتظم $ر ح ط$ على الدائرة التي نصف قطرها $د$ بان لا يلتقي بالمحيط الذي نصف قطره $أ$ وبعدذا اذا تصور منشور قائم على ان تكون قاعدته $ر ح ط$ وارتفاعه $ع$ فالمحدب منه يساوي حاصل ضرب دور $ر ح ط$ في ارتفاع $ع$ (٢) وحيث كان هذا الدور اصغر من محيط $أ$ كان المحدب من المنشور اصغر من حاصل محيط $أ$ \times $ع$ ولكنه فرض مساحة لمحدب الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها $د$ ومن كون هذه الاسطوانة مرسومة داخل المنشور يلزم ان يكون محدب المنشور اصغر من محدب

الاسطوانة المرسومة داخله وهذا محال والحق بخلافه (٣) فلذا استحال ما قد
فرض وتبين ان حاصل ضرب محيط قاعدة الاسطوانة في ارتفاعها لا يكون
مساحة لمحذب اسطوانة اصغر منها

ثانيا ان عين هذا الحاصل المرقوم لا يكون مساحة لمحذب اسطوانة أكبر منها لانه
اذا فرض $د$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة المعلومة اختصارا للافادة وقيل
ان حاصل محيط $د$ \times $ع$ مساحة لمحذب اسطوانة ارتفاعها $ع$ ومحيط
قاعدتها $ا$ أكبر من محيط القاعدة المفروضة مثلاً لمحذب الاسطوانة التي نصف
قطر قاعدتها $ا$ واجرى العمل كما صرح به في الحال الاول فلا يزال لمحذب
المنشور مساويا لحاصل ضرب اطراف كثير الاضلاع $د$ $ع$ في ارتفاع $ع$
ولا يكون هذا الدور أكبر من محيط $د$ يكون لمحذب المنشور أكبر من حاصل
محيط $د$ \times $ع$ وقد فرض هذا الحاصل مساحة لمحذب الاسطوانة التي نصف
قطر قاعدتها $ا$ فعلى هذا يلزم ان يكون لمحذب المنشور أكبر من لمحذب
الاسطوانة التي أحاطت به وهذا محال (٣) ومن اجل ذلك يظهر ان حاصل ضرب
محيط قاعدة اسطوانة في ارتفاعها لا يكون مساحة لمحذب اسطوانة أكبر منها
ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يكون لمحذب الاسطوانة مساويا لحاصل ضرب محيط
قاعدتها في الارتفاع

* (الدعوى الخامسة النظرية) *

المساحة الجسمية من المخروط تساوي حاصل ضرب قاعدته في ثلث ارتفاعه
(شكل ٢٥٩) اذا كان سم $ع$ ارتفاع المخروط المعلوم و $اع$ نصف قطر
قاعدته وجعل اقطر سطح $اع$ علما لسطح قاعدته فمساحته الجسمية تساوي
حاصل ضرب سطح $اع$ \times $\frac{1}{3}$ سم $ع$

فنعقول أولاً ان قيل ان حاصل سطح $اع$ \times $\frac{1}{3}$ سم $ع$ مساحة لمخروط أكبر
مثلاً للمخروط الذي نصف قطر قاعدته $ع$ الأكبر من $اع$ مع دوام بقاء ارتفاع
سم $ع$ ورسم على الدائرة التي نصف قطرها $اع$ كثير الاضلاع $م$ $ن$ $ط$
المستطعم على أن لا يلتقي بالمحيط الذي نصف قطره $ع$ - (١٠ مقالة ٤) ثم يرسم

هرم يكون المنتظم المرقوم قاعدته ورأسه واقعة أيضا في نقطة $س$ فالمساحة
الجسمية لهذا الهرم تساوي حاصل ضرب مساحة كثير الاضلاع $م$ في $س$ فط
في ثلث ارتفاعه $س$ ع (١٩ مقالة ٦) لكن حيث ان كثير الاضلاع المرقوم اكبر
من سطح الدائرة المرسومة داخله المشار اليها بـ $ع$ ا علم ان الهرم اكبر
من حاصل سطح $ع$ \times $\frac{1}{3}$ $س$ ع وقد فرض هذا المقدار مساحة للخروط
الذي رأسه $س$ ونصف قطر قاعدته $ع$ وهو ما كان مشتقاً على الهرم
المذكور وهذا محال ان يكون المحوى اكبر مما حواه والحق بخلافه
ومن ثمة لا يكون حاصل ضرب القاعدة في ثلث الارتفاع مساحة لجسم مخروط
اكبر مما هو مفروض

ثانياً ان الحاصل المرقوم لا يكون مساحة لجسم مخروط اصغر منه ولئلا يتغير
الشكل يجعل $ع$ نصف قطر قاعدة المخروط المفروض فان قيل انه يمكن
ان يكون حاصل سطح $ع$ \times $\frac{1}{3}$ $س$ ع مساحة للمخروط الذي نصف قطر
قاعدته $ع$ فيجري العمل كما صرح به في الشق الاول فحاصل ضرب مساحة
 $م$ في $س$ في $\frac{1}{3}$ السطحية في ثلث $س$ ع هو المساحة الجسمية للهرم $س$ م فط
لكن مساحة $م$ في $س$ اصغر من سطح $ع$ فعلم ان مساحة جسم الهرم
اصغر من حاصل سطح $ع$ \times $\frac{1}{3}$ $س$ ع الذي فرض انه مساحة للمخروط
الذي نصف قطر قاعدته $ع$ وارتفاعه $س$ ع فلزم ان يكون الهرم اصغر
من المخروط السكائن داخله وهذا محال والحق بخلافه

فتبين ان حاصل ضرب مساحة قاعدة مخروط في ثلث ارتفاعه لا يكون مساحة
لمخروط اصغر منه كما لا يخفى ومن أجل ذلك ظهر ان مساحة قاعدة المخروط
مضروبة في ثلث ارتفاعه لا تكون مساحة لجسم مخروط أكبر منه بل انه مساحة
ذاته وثبت المطلوب

نتيجة المخروط ثلث الاسطوانة التي اتحد بها قاعدة وارتفاعا ومن هذا نتج ما سياتي
اولاً ان النسبة بين الخاريط المتساوية الارتفاع كالنسبة بين قواعدها
وثانياً ان النسبة بين الخاريط المتساوية القواعد كالنسبة بين ارتفاعاتها

وثالثان النسبة بين المخاريط المتشابهة كالنسبة بين مكعبات اقطار قواعدها
وكالنسبة بين مكعبات ارتفاعاتها

تنبيه اذا كان $\frac{1}{2}$ نصف قطر قاعدة مخروط و $\frac{1}{3}$ ارتفاعه فمساحة جسمه
تكون $\frac{1}{3} \pi \times \frac{1}{4} \pi \times \frac{1}{3}$ (الدعوى السادسة النظرية) *

(شكل ٢٦٠) اذا كان $\frac{1}{2}$ نصف قطري قاعدة مخروط ادهر
الناقص و $\frac{1}{3}$ ارتفاعه فمساحة جسمه تكون $\frac{1}{3} \pi \times \frac{1}{4} \pi \times \frac{1}{3}$
($\frac{1}{3} \pi + \frac{1}{3} \pi + \frac{1}{3} \pi$)

فاذا كان $\frac{1}{2}$ ط و $\frac{1}{3}$ هـ مائلا يكتفي مخروط $\frac{1}{3}$ بان تكون قاعدته
ورح مقابلة لقاعدة المخروط مع تساوى الارتفاع فيهما واما يمكن فرض كون
قاعدتهما موضوعتين على مستوي واحد تتساوى ابعادهما $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ من
مستوى القاعدة فاذا مدمستوي هـ فـ وحدث مقطع $\frac{1}{3}$ في الهرم
فهذا المقطع يكتفي قاعدة $\frac{1}{3}$ لان النسبة بين قاعدتي $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ كالنسبة
بين مربعي $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ نصف قطريهما (١١ مقالة ٤) او كالنسبة بين مربعي $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$
و $\frac{1}{3}$ ارتفاعهما فكانت نسبة مثلثي $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3}$ كالنسبة بين
مربعي الارتفاعين المرفوعين (١٥ مقالة ٦) وبهذا تكون النسبة بين دائرتي
 $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ كنسبة مثلثي $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3}$ لكن قد فرض التكافؤ بين مثلث
ورح ودائرة $\frac{1}{2}$ فثبت $\frac{1}{3}$ ايضا يكتفي دائرة $\frac{1}{2}$ ومن المعلوم
ان المساحة الجسمية للهرم تكافئ مساحة المخروط وذلك لتكافؤ القواعد فيهما
لان المساحة الجسمية من مخروط $\frac{1}{2}$ هي حاصل ضرب قاعدة $\frac{1}{2}$ في مقدار
 $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3}$ المساحة الجسمية من هرم $\frac{1}{2}$ هي حاصل ضرب قاعدة
ورح في مقدار $\frac{1}{3}$ وبمثل هذا يثبت ان يكون هرم $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ مكافئا
لمخروط $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ فصار جسم مخروط ادهر ناقص مكافئا لجسم هرم
ورح $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ الناقص الاخر لكن قاعدة ورح تكافئ الدائرة التي
نصف قطرها $\frac{1}{2}$ ومساحتها $\frac{1}{2} \pi \times \frac{1}{2} \pi$ وكذلك تصير قاعدة $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

ط \times دف $\frac{r}{2}$ ولما كان مقدار ط \times اع \times دف وسطا متناسبا بين
مقداري ط \times اع و ط \times دف كانت المساحة الجسمية للهرم
أو المخروط الناقص $\frac{1}{3}$ ع ف \times (ط \times اع $\frac{r}{2}$ + ط \times دف $\frac{r}{2}$ + ط
 \times اع \times دف) (٢١ مقالة ٦) اعني $\frac{1}{3}$ ط \times ف ع \times (اع $\frac{r}{2}$ + دف $\frac{r}{2}$ +
اع \times دف) وهو عين ما تقدم

(الدعوى السابعة النظرية)

السطح المحذب من المخروط مساو لحاصل ضرب محيط قاعدته في نصف ضلعه
أي في نصف الخط الواصل

(شكل ٢٥٩) اذا كان اع نصف قطر قاعدة المخروط و سه رأسه و سـا
ضلعه فسطحه المحذب يصير محيط اع \times $\frac{1}{2}$ سـا

لانه لو قيل انه يمكن ان يكون ذلك مساحة لسطح المخروط الذي رأسه أيضا
في نقطة سه ونصف قطر قاعدته أكبر من عـا فهو عـر و رسم مـد فـط
كثير الاضلاع المنتظم على الدائرة الصغيرة وهو لا يلاق المحيط الذي نصف قطره
عـر يحدث هرم سه مـد فـط المنتظم بان يكون كثيرا الاضلاع المذكور
قاعدته ونقطة سه رأسه فـسا سـه مـد اثـثات سه مـد أحد المثلثات التي
يتركب منها محذب الهرم هي حاصل ضرب قاعدة مـد في نصف ارتفاع سـا
وهو ضلع المخروط المفروض وهذا الارتفاع مساو لما في سه مـد فـك
الى آخر سائر المثلثات الاخر من ارتفاع فـط هـر ان تكون مساحة محذب الهرم
مساوية لحاصل ضرب دور مـد فـط م في مقدار $\frac{1}{2}$ سـا فصار محذب
الهرم المذكور أكبر من حاصل ضرب محيط عـا \times $\frac{1}{2}$ سـا حيث كان
دور مـد فـط م أكبر من محيط اع فلزم ان يكون أكبر من محذب المخروط
الذي رأسه سه ونصف قطر قاعدته عـر وهذا مستحيل لانه لو صار تطبيق
هذا الهرم على هرم يساويه وهذا المخروط على مخروط يساويه القاعدة للقاعد

لكان سطح المخروطين أكبر من سطح الهرمين لاحاطته به من كل جهة (فائدة ٢)
وهذا الخلف ناشئ عما فرضنا فكان محالا ومن ثمة لا يمكن ان يكون حاصل
ضرب محيط ع $\times \frac{1}{4}$ مساويا مساحة لمحدب مخروط أكبر من محدب المخروط
المفروض

ثانيا ان ذلك الحاصل لا يكون مساحة أيضا لمحدب مخروط أصغر منه لانه اذا كان
ع - نصف قطر قاعدته المخروط المفروض وفرض حاصل ضرب محيط ع -
 $\times \frac{1}{4}$ مساويا لمحدب المخروط الذي رأسه س ه ونصف قطر قاعدته ا ع
الأصغر من ع - واجرى العمل كما تقدم لا يزال سطح هرم س ه م نصف ط
مساويا لحاصل ضرب دور م نصف ط في مقدار $\frac{1}{4}$ مساويا ومن كون دور
م نصف ط أصغر من محيط ع - فضلا عن كون س ه ا أصغر من س ه ت
فعلى هذه البراهين المتضاعفة التاكيد يصير محدب الهرم أصغر من حاصل ضرب
محيط ع - $\times \frac{1}{4}$ مساويا وقد فرض ان هذا الحاصل مساحة لسطح
محدب المخروط الذي نصف قطر قاعدته ع ا فلزم ان يكون سطح الهرم المرفوم
أصغر من سطح المخروط المرسوم داخله وهذا من قبيل المحال فتبين ان حاصل
ضرب محيط قاعدة مخروط في نصف ضلعه لا يكون أيضا مساحة لمحدب مخروط
أصغر منه والحاصل انه ثبت المطلوب من ان يكون حاصل ضرب محيط القاعدة
في نصف الخط الواصل يساوي محدب المخروط المفروض

تنبيه اذا كان ضلع المخروط ل ونصف قطر القاعدة م وكان محيط قاعدته
٢ ط م فسطح محدبه يساوي ٢ ط م $\times \frac{1}{4}$ ل أو ط م ل
(الدعوى الثامنة النظرية)

(شكل ١٦١) السطح المحدب من ا ه ه - المخروط الناقص يساوي حاصل
ضرب ضلع ا ه في نصف مجموع محيطي قاعدتيه ا - و ه ه
فيرسم خط او عمودا على س ه ا في مستوى س ه ا - المار بمحور س ه ع
مساويا للمحيط الذي نصف قطره ا ع ويوصل س ه و ويرسم أيضا د ع موازيا
لخط او فلشابهة مثلثي س ه ا ع و س ه د يكون ا ع : د ه :: س ه :

سـ ولوجود المشابهة ايضا بين مثلثي سـ او و سـ صـ ير او : حـ
 :: سـ ا : سـ د ولتشابه النسب يصير او : حـ :: ا ع : د أو ::
 محيط ا ع : محيط د (١١ مقالة) ومن كون او = محيط ا ع بالعمل
 يصير د حـ = محيط د اذ اعلمت ذلك فمقدار او $\times \frac{1}{4}$ سـ ا يكون
 مساحة مثلث سـ او و مساويا لسطح مخروط سـ اـ الذي كان مقداره
 مساحته محيط ا ع $\times \frac{1}{4}$ سـ ا وكذلك ثبت ان يكون مثلث سـ د حـ
 مساويا لسطح مخروط سـ د هـ فلذا يكون سطح مخروط ا د هـ الناقص
 مساويا لسطح ا د حـ و شبهه المخرف وحيث كانت مساحة شبهه المخرف ا د
 $\times (\frac{1}{4} + د حـ)$ ثبت المطلوب من ان يكون سطح مخروط ا د هـ الناقص
 مساويا لحاصل ضرب ضلع ا د في نصف مجموع محيطي قاعدتيه

نتيجة اذا رسم ط كل من نقطة ط وسط ضلع ا د موازيا لخط ا ب و ط م
 موازيا لخط ا د فعلى ما صرح به آنفا ثبت ان يكون ط م = محيط ط ك
 لكن من كون شبهه بمخرف ا د حـ و = ا د \times ط م = ا د \times محيط
 ط ك يجب ان يكون السطح المخدب من المخروط الناقص مساويا لحاصل
 ضرب ضلعه في محيط المقطع المنشأ متساوي الابعاد بين قاعدتيه وبذلك يمكن
 التعبير عنه

تنبيه اذا ادير خط ا د الموضوع في احد طرفي حـ ع الموجود في مستوي
 حول الخط المرقوم مرة واحدة فمساحة السطح الحاصل من دوران ذلك الخط
 يكون ا د \times محيط ا ع + محيط د حـ أو ا د \times محيط ط ك

وحيث ان خطوط ا ع و د و ط ك تكون عمادا نازلة من نهايتي خط ا د
 ووسطه على محور حـ ع لانه اذا مد خطا ا د و ع حتى التقيا في نقطة
 سـ فلا جرم ان السطح المراد و محيط ا د هو سطح المخروط الناقص الذي كان
 ع ا و د نصف قطري قاعدتيه * ووجود رأس المخروط الكامل في نقطة سـ

غير خفي وهذا السطح هو المساحة التي سبق ذكرها
 واما اذا وقعت نقطة د على نقطة سـ وحدث مخروط كامل أو أنشئت

اسطوانة بجعل خط $ا$ موازياً للمعور فلا تزال المساحة كما تقدم لكن في الحال الأولى ينعدم $د$ أصلاً وفي الحال الثانية يصير مساوياً لخط $ا$ ع ونظراً ط $ك$ أيضاً

*** (الدعوى التاسعة الفائدة) ***

(شكل ٢٦٢) إذا كان $ا$ و $د$ و $د$ اضلاعاً متواليه من كثير اضلاع منتظم و $ع$ مركز و $ع$ نصف قطر الدائرة المرسومة داخله وفرض تدوير $ا$ $د$ قسم كثيراً الاضلاع الموضوع في أحد طرفي قطر و $ا$ مرة واحدة حوله فالمساحة السطحية الحاصلة من دورانه تكون $م$ $ق$ $×$ محيط $ع$ وارتفاع هذا السطح هو $م$ $ق$ اعني القسم المحصور من المحوريين عمودي $ا$ $م$ و $د$

فإذا كانت نقطة $ع$ وسط اضلاع $ا$ و $كان$ $ع$ $ك$ هو العمود النازل من نقطة $ع$ على المحور فمساحة السطح المرسوم بضلع $ا$ تكون $ا$ $×$ محيط $ع$ $ك$ (٨) ويرسم $ا$ موازياً للمعور ولوجود المشابهة في مثلثي $ا$ $د$ و $ع$ $ك$ لتمام اضلاعهم اعلى وجه التناظر اعني ان $ع$ $ع$ عمود على $ا$ و $ع$ $ك$ على $ا$ $د$ و $ع$ $ك$ على $ا$ $د$ تصوير $ا$: $ا$ $د$ أو $م$ $ق$:: $ع$: $ك$ أو :: محيط $ع$: محيط $ع$ $ك$ فلذا صار $ا$ $×$ محيط $ع$ $ك$ = $م$ $ق$ $×$ محيط $ع$ فعلم ان مساحة السطح المرسوم بضلع $ا$ تساوي حاصل ضرب ارتفاعه $م$ $ق$ في محيط الدائرة المرسومة داخله

وكذلك السطح المرسوم بضلع $د$ يكون = $د$ $ق$ $×$ محيط $ع$ والمرسوم بضلع $د$ = $د$ $ق$ $×$ محيط $ع$ فصارت مساحة السطح الحاصل بدوران قسم كثيراً الاضلاع $ا$ $د$ هكذا (م) $ق$ + $د$ $ق$ + $د$ $ق$ $×$ محيط $ع$ أو $م$ $ق$ $×$ محيط $ع$ وبذلك يثبت المطلوب من ان تكون مساحة السطح المرسوم بذلك القسم هي حاصل ضرب ارتفاعه في محيط الدائرة المرسومة داخله

نتيجة اذا كان كثير الاضلاع المنتظم كاملا وعددا ضلعه زوجا ومحور و د مارا
برأسى و و د المتقابلتين فالسطح المرسوم بتدوير و ا د نصف كثير
الاضلاع حول المحور المرقوم يساوى حاصل ضرب محور و د في محيط الدائرة
المرسومة داخله وحينئذ يصير محور و د قطرا للدائرة المرسومة فوقه
(الدعوى العاشرة النظرية)

سطح الكرة يساوى حاصل ضرب قطرها في محيط دائرة عظيمة من دوائرها
بيان ذلك اولا ان حاصل ضرب قطر الكرة في محيط دائرة عظيمة لا يكون مساحة
لسطح كرة اكبر منها

(شكل ٢٦٣) لانه لو قيل انه يمكن ان يكون ا ب محيط ا د مساحة للكرة
التي نصف قطرها د و رسم كثيرا اضلاع منتظم عددا ضلعه زوج على الدائرة
التي نصف قطرها ا ب بحيث لا يلاقى محيط الدائرة التي نصف قطرها د
كانت نقطتنا م و س رأسين متقابلين في كثير الاضلاع فاذا دور م ف س
نصف كثير الاضلاع حول قطر م س فمساحة السطح الحادث من دورانه
تكون م س محيط ا ب (٩) لكن من حيث ان خط م س اكبر من
قطر ا ب فالسطح المرسوم بكثير الاضلاع يكون اكبر من حاصل ا ب محيط
ا ب فلزم ان يكون اكبر من سطح الكرة التي نصف قطرها د وهذا خلف لان
سطح الكرة اكبر من السطح المرسوم بكثير الاضلاع لان سطح الكرة احاط به
من كل جانب واشتمل عليه فتبين ان حاصل ضرب قطر الكرة في محيط دائرتها
العظيمة لا يمكن ان يكون مساحة لسطح كرة اكبر منها

وثانيا ان ذلك الحاصل لا يكون مساحة لسطح كرة اصغر منها * فلو قيل انه يمكن
ان يكون حاصل د ه محيط د س مساحة لسطح الكرة التي نصف قطرها
ا ب وأجرى العمل كما سبق في الحالة الاولى لا يزال سطح الجسم الناتج من كثير
الاضلاع مساويا لحاصل م س محيط ا ب لكن من حيث ان خط م س
اصغر من قطر د ه ومحيط ا ب أيضا اصغر من محيط د ه يصير هذان
برهاتين على ان يكون سطح الجسم المرسوم بكثير الاضلاع اصغر من حاصل د ه

× محيط γ ولاجل هذا الزم ان يكون أصغر من سطح الكرة التي نصف قطرها α وهذا محال لان كثير الاضلاع سطحه احاط بالكرة من كل جانب فكان السطح المرسوم بكثير الاضلاع اكبر من سطح الكرة ومن ثمة تبين انه لا يمكن ان يكون حاصل ضرب قطر الكرة التي نصف قطرها γ في محيط دائرتها العظيمة مساحة سطح كرة أصغر منها وبهذا ثبت المطلوب من ان تكون مساحة سطح الكرة مساوية لحاصل ضرب قطرها في محيط دائرة عظيمة من دوائرها

نتيجة حيث كانت مساحة سطح الدائرة العظيمة مساوية لحاصل ضرب محيطها في نصف نصف القطر او ربع القطر فكانت مساحة سطح الكرة قدر أربعة أمثال سطح الدائرة العظيمة

تنبيه حيث تعين سطح الكرة بالسطوح المستوية يكون تعيين القيمة المطلقة من الشقوق والمثلثات الكروية سهلا ونسبة كل منها الى سطح الكرة الكامل على ما سيأتي

بيان ذلك اولاً ان الشقة التي زاويتها α نسبتها الى سطح الكرة كنسبة زاوية α الى أربع قوائم (٢٠ مقالة ٧) أو كنسبة القوس العظيم الذي هو مقدار زاوية α الى محيط الدائرة العظيمة لكن حيث ان مساحة سطح الكرة مساوية لحاصل ضرب قطرها في محيط دائرتها العظيمة فمساحة سطح الشقة يساوي حاصل ضرب القوس الذي هو مقدار زاوية الشقة في قطر الكرة

وثانياً مساحة سطح كل مثلث كروي تكافئ الشقة التي زاويتها تساوي نصف التفاضل بين القائمتين وبين مجموع الزوايا الثلاث من ذلك المثلث (٢٣ مقالة ٧) مثلاً اذا كان α و β و γ الاقواس العظام التي هي مقادير الزوايا الثلاث من المثلث وم محيط دائرة عظيمة وقطرها فالمثلث الكروي يكافئ الشقة التي مقدار زاويتها $\alpha + \beta + \gamma$ فلذا صارت مساحتها $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$

وكذلك المثلث القائم الزوايا الثلاث كل من أقواسه α و β و γ الثلاثة يساوي مقدار $\frac{1}{2} \pi$ ومجموعها يساوي $\frac{3}{2} \pi$ وحيث ان تفاضل هذا المقدار ونصف π هو $\frac{1}{2} \pi$ يكون نصف هذه التفاضلة $= \frac{1}{4} \pi$ ومن أجل هذا

كانت مساحة المثلث القائم الزوايا الثلاث $= \frac{1}{8} م \times ق$ وهو ثلث سطح الكرة

واما سطح كثير الاضلاع الكروي فيتبع المثلث من غير واسطة فضلا عن تعيين مساحته كما في الدعوى الرابعة والعشرين من المقالة السابعة حيث كان المثلث القائم الزوايا الثلاث هناك احدا للمساحة والا ن جعل على نسق المستوى

(الدعوى الحادية عشرة النظرية)

سطح منطقة الكرة مساو لحاصل ضرب ارتفاعها في محيط دائرة عظيمة (شكل ٢٦٩) فاذا كان هو قوسا كبيرا اصغر من ربع المحيط هو $دو$ هو العمود النازل على نصف قطر $هـ$ فمساحة المنطقة ذات القاعدة المرسومة بتدوير قوس $هو$ حول $هـ$ تكون $هـ د$ محيط $هـ د$

بيان ذلك أولا أنه اذا فرض ان مقدار مساحة $هـ د$ المنطقة أصغر من $هـ د$ مثلثان قيل انه لا يمكن ان يكون حاصل $هـ د$ محيط $د$ مساحة لها ورسم جو كثير الاضلاع $هـ م$ تقع $ف$ داخل قوس $هو$ على أن لا يلاقى المحيط الذي نصف قطره $د$ وانزل عمود $د$ على $هـ م$ يكون $هـ د$ محيط $د$ مقدار مساحة السطح الحادث من تدوير كثير الاضلاع $هـ م$ حول $د$ هو (٩) وحيث ان هذا المقدار اكبر من مقدار $هـ د$ محيط $د$ وقد فرض انه مساحة للمنطقة المرسومة بقوس $هو$ لزم ان يكون السطح المرسوم بكثير الاضلاع $هـ م$ تقع $ف$ اكبر من السطح المرسوم فوقه بقوس $هو$ وهذا محال * لان السطح الاخير احاط بالسطح الاول من كل جهة فهو اكبر منه ومن ثمة علم ان مساحة كل منطقة ذات قاعدة واحدة لا تكون أصغر من حاصل ضرب ارتفاع تلك المنطقة في محيط الدائرة العظيمة

فانيا ان مساحة تلك المنطقة لا تكون ايضا اكبر من حاصل ضرب ارتفاعها محيط الدائرة العظيمة فيفرض ان المرسومة بدوران قوس $ا$ حول $د$ وانه يمكن ان تكون منطقة $ا$ < حاصل $ا د$ محيط $د$ فاقول نسطح

الكرة الكامل مركب من منطقتي $ا$ و $ب$ ومساحته $ا ب$ محيط $ا$ (١٠) او $ا د$ \times محيط $ا ب$ + $د ح$ \times محيط $ا د$ فاذا كانت منطقة $ا$ $<$ $ا د$ \times محيط $ا ب$ نظر للتعاقل يلزم ان تكون منطقة $ب$ $>$ $د ح$ \times محيط $ا د$ وهذا محال كما صرح به في الضرب الاول من هذه الدعوى فوضح ان مساحة المنطقة ذات القاعدة لا تكون اكبر من حاصل ضرب ارتفاعها بمحيط دائرة عظيمة

والمعنى انه قد تبين ان مساحة كل منطقة ذات قاعدة واحدة تساوى حاصل ضرب ارتفاعها في محيط الدائرة العظيمة

(شكل ٢٢٠) واما المنطقة ذات القاعدتين فالاذا جعلت المنطقة المقروضة انها الحادثة من تدوير قوس $د ح$ حول قطر $د ه$ وانزل عمودا $و ع$ و $ح ك$ فلاجرم ان المنطقة المرسومة بقوس $د ح$ هي التفاضل بين المنطقتين المرسومتين بقوس $د ح$ و $د و$ وحيث ان مساحتهما $د ك$ \times محيط $د ح$ و $د و$ \times محيط $د و$ فكانت مساحتهما $(د ك - د و)$ \times محيط $د و$ او $ع ك$ \times محيط $د و$ ومن ثمة ثبت المطلوب على آكد وجه من ان تكون مساحة كل منطقة تساوى حاصل ضرب ارتفاعها في محيط الدائرة العظيمة سواء كانت ذات قاعدة واحدة أو ذات قاعدتين

نتيجة نسبة المنطقتين المعينتين على كرة واحدة أو كرات متساوية كنسبة ارتفاعيها ونسبة المنطقة الى سطح الكرة كنسبة ارتفاع تلك المنطقة الى القطر

(الدعوى الثانية عشرة النظرية)

(شكل ٢٦٤ و ٢٦٥) مثلث $ا ب د$ ومستطيل $د ح ه و$ هو المجدد القاعدة والارتفاع اذا ادبرنا حول قاعدة $د ح$ المشتركة فالجسم الحادث من دوران المثلث يكون ثلث الاسطوانة الحاصلة من دوران المستطيل

(شكل ٢٦٤) اذا انزل عمود $ا د$ على المحور فالخروط المرسوم بمثلث $ا د ب$ ثلث الاسطوانة المرسومة بمستطيل $ا د ح$ (٥) وكذلك الخروط المرسوم بمثلث $ا د ب$ ثلث الاسطوانة المرسومة بمستطيل $ا د ح$ فظهر ان مجموع

المخروطين أو الجسم المرسوم بمثلث $ا-ح$ ~~يكون~~ ثلث مجموع الاسطوانتين
أو الجسم المرسوم بمستطيل $ح-هـ$

(شكل ٢٦٥) وإذا وقع عمود $ا$ خارج المثلث فالجسم المرسوم بمثلث $ا-ح$
هو التفاضل بين المخروطين المرسومين بمثلثي $ا-د$ و $ا-هـ$ وحيث أنه تكون
الاسطوانة المرسومة بمستطيل $ح-هـ$ و تفاضل الاسطوانتين المرسومتين
بمستطيلي $ا-د$ و $ا-هـ$ فلذا علم أنه لا يزال الجسم الحادث من دوران
المثلث ثلث الاسطوانة الحادثة من دوران المستطيل المتحدين قاعدة وإرتقاها
وثبت المطلوب

ففيه مساحة سطح الدائرة التي نصف قطرها $ا$ هي $ط \times ا^2$ فاحاصل $ط$
 $\times ا^2 \times ح$ ~~يكون~~ مساحة جسم الاسطوانة المرسومة بمستطيل
 $ح-هـ$ و $\frac{1}{3} ط \times ا^2 \times ح$ مساحة الجسم المرسوم بمثلث $ا-ح$
(الدعوى الثالثة عشرة العملية) *

(شكل ٢٦٦) طريق استخراج مساحة الجسم الحاصل من دوران مثلث
 $ا-ح$ على رأسه $ح$ حول خط $ح-د$ المرسوم كيفية ما كان خارجا عن ذلك
المثلث

فيمتد ضلع $ا-ح$ حتى يلاقى محور $ح-د$ في نقطة $د$ وينزل عمودا $ا-و-د$
من نقطتي $ا-و$ على المحور

فالجسم المرسوم بمثلث $ا-ح$ يكون $\frac{1}{3} ط \times ا.م \times ح$ (١٢) والجسم
المرسوم بمثلث $ح-د$ يكون $\frac{1}{3} ط \times د-م \times ح$ فتفاضل هذين
الجسمين أو الجسم المرسوم بمثلث $ا-ح$ يكون $\frac{1}{3} ط \times (ا.م - د.م)$
 $\times ح$ وقد يمكن التعبير عن ذلك بصورة أخرى فاقول إذا أنزل عمود $د-و$ على
 $ح-د$ من نقطة $و$ وسط $ا-د$ ورسم $ح-ع$ من نقطة $ع$ موازيا لخط $ح-د$

فبصير أم + د = ٢ = ٢ (٧ مقالة) وحيث أن أم - د = ٢ = ٢

فلذا صار (أم + د) × (أم - د) = (٢) × (٢) = ٤ أو أم^٢ - د^٢ = ٤ × ٢ = ٨

(١٠ مقالة) فتتخصر مساحة ذلك الجسم في تعبير $\frac{٢}{٣}$ ط × ٢ × ٢ = ٨

× د = ٨ إذا انزل عمود ح على أ فنشابه مثلثي أ ر ع

و د ح ف يتأق منه هذا التناسب أ ع : ح ف :: أ ر : د ولذا بصير

أ ع × د = ح ف × أ ر ومن كون حاصل ح ف × أ ر ضعف

مساحة مثلث أ ر د أيضا أ ع × د تساوي ٢ أ ر^٢ ومن ثمة كان

الجسم المرسوم بمثلث أ ر د $\frac{٢}{٣}$ ط × أ ر × د = ٨ وعين ذلك أ ر

× $\frac{٢}{٣}$ محيط ٢ = ٨ (ذلك بأن كان محيط ٢ = ٢ ط × ٢) فعلم أن

مساحة الجسم المرسوم بدوران مثلث أ ر د مساو لحاصل ضرب مساحته

بثلاثي المحيط المرسوم من نقطة ع وسط قاعدته

(نتيجة) (شكل ٢٦٧) إذا كان ضلع أ د = ح فخط ح ع بصير عمودا على

أ ر ومساحة مثلث أ ر د تساوي حاصل أ ر × $\frac{١}{٢}$ ح ف ومساحته

الجسمية $\frac{٢}{٣}$ ط × أ ر × د = ٨ فقول إلى $\frac{٢}{٣}$ ط × أ ر × د = ٨

× د = ٨ ولوجود التشابه بين مثلثي أ ر ع و د ح ف يتأق هذا التناسب

أ ر : ر ع أو م د :: ح ف : د ومن هذا صار أ ر × د = ٨

م د = ٨ × د فحين أن مساحة الجسم المرسوم بمثلث أ ر د المتساوي

السابقين تكون $\frac{٢}{٣}$ ط × م د × $\frac{٢}{٣}$

تنبيه حل هذا المطلب يؤهم أنه مبنى على كون ضلع أ ر إذا امتد يلاقى المحور

ولكن إذا كان خط أ ر المرسوم موازيا للمحور فنتج منها الإيزال كذلك

(شكل ٢٦٨) وأما المساحة الجسمية للأسطوانة المرسومة بمسقطيل أم د -

فهى ط × أم × م د ومساحة الجسم المرسوم بمثلث أ ح م فهى $\frac{١}{٣}$ ط ×

أم × م د فمساحة جسم المخروط المرسوم بمثلث أ ر د = $\frac{١}{٣}$ ط × أم × م د

فإذا جمع الجسمان الاولان وحذف الثالث يبقى $\text{ط} \times \text{أ}^{\frac{2}{3}} \times (\text{م} + \frac{1}{3}\text{م})$
 $-\frac{1}{3}\text{م}$ وهو مساحة لجسم مثلث ا-ح ومن كون $\text{ح} - \text{م} =$
 م يجرى ذلك القدر بجرى $\text{ط} \times \text{أ}^{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{3}\text{م}$ او $\frac{1}{3}\text{ط} \times \text{ح}^{\frac{2}{3}} \times \text{م}$
 ويختصر فيه ولا جرم ان هذا موافق لتناجج ما تقدم
 * (الدعوى الرابعة عشرة النظرية) *

(شكل ٢٦٢) اذا كانت ا-و و ح-و و د-و المتعددة المتوالية اضلاعاً كبير
 اضلاع منتظم و ع مركزه و ع-ع نصف قطر الدائرة المرسومة داخله ونصور
 تدوير ا-ح قطاع كثير الاضلاع الموضوع في احد طرفي قطري و-ح حوله
 فمساحة الجسم الحاصل من دورانه تكون $\frac{1}{3}\text{ط} \times \text{ع}^{\frac{2}{3}} \times \text{م}^{\frac{2}{3}}$ و $\text{م}^{\frac{2}{3}}$ هو
 جرم المهور المحدود بينهما بقى عمودى ا-م و د-ح ولا نظام كثير الاضلاع كانت
 كافة مثلثات ا-ع-ب و ح-ع-د الخ متساوية ومتساوية الساقين فعلى
 ما صرح به في نتيجة الدعوى المتقدمة صارت مساحة الجسم الحاصل من دوران
 مثلث ا-ح-ع المتساوى الساقين $\frac{1}{3}\text{ط} \times \text{ع}^{\frac{2}{3}} \times \text{م}^{\frac{2}{3}}$ ومساحة الجسم
 المرسوم بمثلث ح-ع-د $\frac{1}{3}\text{ط} \times \text{ع}^{\frac{2}{3}} \times \text{ح}^{\frac{2}{3}}$ وايضاً مساحة الجسم المرسوم
 بمثلث ح-ع-د $\frac{1}{3}\text{ط} \times \text{ع}^{\frac{2}{3}} \times \text{ح}^{\frac{2}{3}}$ فلذا صار مجموع هذه الاجسام اعنى مساحة
 الجسم المرسوم بشكل ا-ح-ع-د قطاع كثير الاضلاع $\frac{1}{3}\text{ط} \times \text{ع}^{\frac{2}{3}} \times (\text{م} + \text{ح})$
 $(\text{ح} + \text{ف} + \text{ن})$ او $\frac{1}{3}\text{ط} \times \text{ع}^{\frac{2}{3}} \times \text{م}^{\frac{2}{3}}$ وثبت المطلوب
 * (الدعوى الخامسة عشرة النظرية) *

كافة القطاع الكرويية مساحتها الجسمية تساوى حاصل ضرب المنطقة التي
 تكون قاعاً مـدة اها في ثلث نصف القطر والمساحة الجسمية من الكرة الكاملة
 تساوى حاصل ضرب سطحها المستدير في ثلث نصف قطرها

(شكل ٢٦٩) حيث يرسم القطاع الكروي بدوران $اـ$ قطاع الدائرة حول $ا$ ومساحة المنطقة المرسومة بقوس $اـ$ هي $اـ \times$ محيط $اـ$ او $٢ \times ط \times اـ \times اـ$ (١١) فمساحة جسم القطاع الكروي مساوية لمماسل ضرب هذه المنطقة في $\frac{1}{3}$ اـ اعني $\frac{1}{3} ط \times اـ^2 \times اـ$

اولا ان قيل انه يمكن ان يفرض مقدار $\frac{1}{3} ط \times اـ^2 \times اـ$ مساحة جسم قطاع كروي اكبر منه مثلا اذا فرض مساحة لجسم القطاع الكروي المرسوم بشكل $هـ$ و قطاع الدائرة المشابه لقطاع $اـ$ فيرسم جزء كثير الاضلاع $هـ$ م $هـ$ بالمنظم داخل قوس $هـ$ و اضلاعه لا تلاقى قوس $اـ$ ثم اذا تصور دوران $هـ$ و $هـ$ و قطاع كثير الاضلاع و $هـ$ و قطاع الدائرة في آن واحد حول $هـ$ وكان $هـ$ نصف قطر الدائرة المرسومة داخل كثير الاضلاع وكان $و$ عودا نازلا على $هـ$ فالجسم المرسوم بقطاع كثير الاضلاع تكون مساحته $\frac{1}{3} ط \times اـ^2$

$هـ \times اـ$ (١٤) فيكون بعد $هـ$ اكبر من $اـ$ بالعمل و $هـ$ ايضا اكبر من $اـ$ لانه اذا وصل $اـ$ و $هـ$ فالثلاثان الحادثان $هـ$ و $اـ$ سيكونان متشابهين فنذلك يحصل هذا التناسب $هـ : اـ :: و : هـ$ $هـ : و :: هـ : اـ$ فظهر ان يكون $هـ < اـ$

وعلى مقتضى هذه الادلة المأكدة يكون حاصل $\frac{1}{3} ط \times اـ^2 \times اـ$ $هـ$ اكبر من حاصل $\frac{1}{3} ط \times اـ^2 \times اـ$ $اـ$ فالخامس للاقول هو الجسم المرسوم بقطاع كثير الاضلاع والثاني هو المرسوم بقطاع الدائرة $هـ$ و وهو المقروض مساحة لجسم القطاع الكروي فلذا لزم ان يكون الجسم المرسوم بقطاع كثير الاضلاع اكبر مما كان مرسوما بقطاع الدائرة وهذا محال حيث كان ذلك الجسم محويا داخل القطاع الكروي فهو اصغر منه ومن ثمة تبين استحالة ان يكون حاصل ضرب المنطقة التي هي قاعدة القطاع الكروي في ثلث القطر مساحة لجسم قطاع كروي اكبر منه

ثانيا لا يمكن ان يكون ذلك القدر مساحة لجسم قطاع كروي دون ذلك * لانه اذا
 كان القطاع الكروي المعلوم حاصل من دوران Γ هو قطاع الدائرة وفرض
 امكان كون حاصل $\frac{r}{2} \times \frac{r}{2} \times \frac{r}{2}$ هو مساحة جسم قطاع كروي اصغر منه
 مثلا اذا كان مساحة لجسم القطاع الكروي الناشئ عن دوران Γ - قطاع
 الدائرة فاقول يبقى العمل المتقدم على حالة فلا يزال مساحة الجسم المرسوم بقطاع
 كثير الاضلاع $\frac{r}{2} \times \frac{r}{2} \times \frac{r}{2}$ هو لكن بعد Γ اصغر من Γ فلذا
 صارت مساحة الجسم المرسوم اصغر من حاصل $\frac{r}{2} \times \frac{r}{2} \times \frac{r}{2}$ وهو ما فرض
 مساحة لقطاع الكروي المرسوم بقطاع الدائرة Γ - فعلى هذا لازم ان يكون
 الجسم المرسوم بقطاع كثير الاضلاع اصغر من جسم القطاع الكروي المرسوم
 بقطاع Γ - وهذا كبر محال * حيث كان القطاع الكروي محويا في الجسم
 المرسوم ومن ثمة ظهر ان حاصل ضرب منطقة لقطاع الكروي في ثلث نصف القطر
 لا يكون مساحة ايضا لجسم قطاع كروي اصغر من المقروض
 والحاصل ان مساحة جسم كافة القطاعات الكروية تساوي حاصل ضرب المنطقة
 التي تكون قاعدة في ثلث نصف القطر

واما اذا عظم Γ - قطاع الدائرة حتى بلغ مقدار نصفها فالقطاع المرسوم
 بدورانه يصير كرة كاملة فعلى ما صرح به في هذه الدعوى يثبت المطلوب من ان
 تكون مساحة جسم الكرة مساوية لحاصل ضرب مساحة سطحها المستدير
 في ثلث نصف قطرها

نتيجة حيث ان نسبة سطوح الكرات كنسبة مربعات انصاف اقطارها كانت
 نسبة حوامل ضرب هذه السطوح في نصف القطر كنسبة مكعبات انصاف
 اقطارها فصارت النسبة بين جسمي الكرتين كالنسبة بين مكعبي نصفي قطريهما
 او كنسبة مكعبي قطريهما

(تبينه) * اذا كان r نصف قطر كرة مسطحها المستدير $\frac{r}{2}$ ومساحة
 جسمها $\frac{r}{2} \times \frac{r}{2} \times \frac{r}{2}$ او $\frac{r^3}{8}$ واذا كان قطرها الكامل r يصير

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \text{ فقول مساحتها الجسمية الى } \frac{1}{8} \text{ ط } \times \frac{1}{8} \text{ و } \frac{1}{8} \text{ او } \frac{1}{8} \text{ ط } \frac{1}{8}$$

• (الدعوى السادسة عشرة النظرية) •

نسبة سطح الكرة الى مجموع سطح الاسطوانة المرسومة عليها (قاعدتا الاسطوانة داخل هذا المجموع) كنسبة عدد ٢ الى عدد ٣ والنسبة بين هذين الجسمين ايضا كذلك

(شكل ٢٧٠) اذا كان م في د ك دائرة عظيمة في الكرة و ا ح د المربع المرسوم عليها و ا د ير ف م ك نصف الدائرة و ف ا د ك نصف المربع معا حول قطر م ك فنصف الدائرة يرسم الكرة ونصف المربع يرسم الاسطوانة المرسومة فوق تلك الكرة

اقول ان ا د ارتفاع هذه الاسطوانة مساو لقطر الكرة ف ك وقاعدة الاسطوانة تساوي دائرة عظيمة * لان قطر ا ح مساو لقطر م د فلذا كان السطح المحذب من الاسطوانة مساويا لحاصل ضرب محيط الدائرة العظيمة بقطرها (٤) وهذه المساحة هي عين مساحة سطح الكرة (١٠) ومن هاتين ان سطح الكرة مساو لمحذب الاسطوانة المرسومة عليها

لكن حيث ثبت ان سطح الكرة مساو لاربعة دوائر عظام فكان محذب الاسطوانة المرسومة عليها مساويا لاربعة دوائر عظام فاذا زيد على هذا مقدار القاعدتين اعني الدائرتين العظيمتين يصير مجموع سطح الاسطوانة المرسومة عليها مساويا لست دوائر عظام ومن ثمة كانت نسبة سطح الكرة الى مجموع سطح الاسطوانة المرسومة عليها كنسبة عدد ٤ الى عدد ٦ او كنسبة عدد ٢ الى عدد ٣ وهذا ما اردنا اثباته وبه صار الشق الاول من هذه الدعوى مساويا

واما الشق الثاني فاقول حيث كانت قاعدة الاسطوانة المرسومة فوق الكرة مساوية لدائرة عظيمة وارتفاعها مساويا لقطرها صارت المساحة الجسمية من الاسطوانة مساوية لحاصل ضرب دائرة عظيمة في قطرها لكن مساحة جسم الكرة

مساوية لحاصل ضرب اربع دوائر عظام في ثلث نصف القطر (١٥) يعني حاصل ضرب دائرة عظيمة في اربعة اثلث نصف القطر او $\frac{2}{3}$ القطر فلذا كانت نسبة الكرة الى الاسطوانة المرسومة عليها كنسبة عدد ٢ الى عدد ٣ ومن اجل ذلك ثبت المطلوب من ان تكون النسبة بين جسامه هذين الجسمين كنسبة سطحهما

* (تنبه) * اذا تصور كثير القواعد على ان تماس بجميع وجوه الكرة فيمكن النظر اليه بان يكون مركبا من اهرام قد اجتمعت رؤسها في مركز الكرة ووجوه كثير القواعد المتعددة صارت لها قواعد ولا يفتقر ان الارتفاع المشترك في كافة تلك الاهرام هو نصف قطر الكرة فلذا كان كل هرم منها يساوي حاصل ضرب الوجه الذي صارت اعدته في ثلث القطر فالساحة الجسمية من كثير القواعد الكامل تساوي حاصل ضرب سطحه في ثلث نصف قطر الكرة المرسومة داخل ويرى من هذا ان نسبة المساحة الجسمية من كثير القواعد المرسومة فوق الكرة كنسبة سطوحها ومن اجل ذلك ظهر ان ما ثبت في حق الاسطوانة المرسومة على الكرة يثبت ايضا في الاجسام المتعددة الاخر

وكذلك اشير في هذا الباب الى ان نسبة سطوح الكثير الاضلاع المرسومة فوق الدائرة كنسبة اطرافها يعني ادوارها

* (الدعوى السابعة عشرة العملية) *

(شكل ٢٧١) طريق استخراج قيمة الجسم الحاصل من دوران د م - قطعة الدائرة مرة واحدة حول قطر خارج عنها

اذا انزل عمودا ه ه و دو على المحور وعمودا ح ح من مركز ح على وتر د و ورسم نصف قطر ح ح و د فالجسم المرسوم

بقطاع ح ح = $\frac{2}{3}$ ط \times $\frac{2}{3}$ ح \times اه (١٥) والمرسوم بقطاع

ح ح = $\frac{2}{3}$ ط \times $\frac{2}{3}$ ح \times او فلذا كان تفاضل هذين الجسمين اعني المرسوم بقطاع

ح ح = $\frac{2}{3}$ ط \times $\frac{2}{3}$ ح \times (او - اه) = $\frac{2}{3}$ ط \times $\frac{2}{3}$ ح هو

ولكن من كون مساحة الجسم المرسوم بمثلث $د ح ر$ المتساوي السابقين

$$= \frac{1}{2} \times ط \times د = \frac{1}{2} \times ط \times د = \frac{1}{2} \times ط \times د$$

$$\times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ ويكون في مثلث } د ح ر \text{ القائم الزاوية } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فلذا كان الجسم المرسوم بقطعة } د ح ر \text{ هو}$$

$$\frac{1}{2} \times ط \times د = \frac{1}{2} \times ط \times د \text{ او } \frac{1}{2} \times ط \times د \text{ وثبت المطلوب}$$

* (تنبيه) * نسبة الجسم المرسوم بقطعة $د ح ر$ الى الكرة التي قطرها $د$

$$\text{كنسبة } \frac{1}{2} \times ط \times د \text{ الى } \frac{1}{2} \times ط \times د \text{ او كنسبة هو}$$

* (الدعوى الثامنة عشرة النظرية) *

كافة القطع الكروية المحصورة بين المستويين المتوازيين مساحتها الجسمية
تساوي مجموع حاصل ضرب ارتفاعها في نصف مجموع قاعدتيها ومساحة جسم
الكرة التي قطرها هو الارتفاع المرسوم

(شكل ٢٧١) اذا كان $د ح ر$ نصف قطري قاعدتي القطعة وادبرت
تلك القطعة حول $د ح$ محور مساحة $د ح ر$ المدورة على ان
يكون $د ح$ ارتفاعها فالجسم الحادث من قطعة $د ح ر$ = $\frac{1}{2}$

$$ط \times د \times ح \text{ هو (١٧) وبما ان جسم المخروط الناقص المرسوم يشبه}$$

$$\text{منصرف } د ح ر = \frac{1}{2} \times ط \times د \times ح = \left(\frac{1}{2} \times د \times ح + \frac{1}{2} \times د \times ح + \frac{1}{2} \times د \times ح \right)$$

$$(٦) نصارت قطعة الكرة التي هي مجموع هذين الجسمين = \frac{1}{2} \times ط \times د \times ح$$

$$\left(\frac{1}{2} \times د \times ح + \frac{1}{2} \times د \times ح + \frac{1}{2} \times د \times ح \right) \text{ لكن اذا رسم } د ح$$

$$\text{موازيا لخط } د ح \text{ يصير } د ح = د ح - د ح = د ح \text{ و } \frac{1}{2} \times ط \times د = \frac{1}{2} \times ط \times د$$

$$= \frac{1}{2} \times ط \times د + \frac{1}{2} \times ط \times د \text{ (٩ مقالة ٣) من اجل ذلك يكون } \frac{1}{2} \times ط \times د =$$

$$\frac{r}{h} + \frac{r}{c} = \frac{r}{d} + \frac{r}{e} + \frac{r}{f} - \frac{r}{g} + \frac{r}{h} \times \frac{r}{h} + \frac{r}{h}$$

فاذا وضع هذا المقدار مقام مربع $\frac{r}{d}$ في العبارة الدالة على ما يساوي القطعة وحذف ما يلزم حذفه تصير المساحة الجسئية لتلك القطعة $\frac{1}{4} \times h \times \frac{r}{h}$

($\frac{r}{h} - \frac{r}{c} + \frac{r}{d} + \frac{r}{e}$) وهذه العبارة تنقسم الى قسمين احدهما ان يكون

$$\frac{1}{4} \times h \times \frac{r}{h} \times (\frac{r}{d} + \frac{r}{e} - \frac{r}{c}) \text{ او } \frac{1}{4} \times h \times (\frac{r}{d} + \frac{r}{e} - \frac{r}{c}) \times \frac{r}{h}$$

وهو نصف مجموع القاعدتين مضروباً في الارتفاع والاخر ان يكون $\frac{1}{4} \times h \times \frac{r}{h}$ اعني الكرة التي قطرها هو (تنبيه ١٥) ومن ثمة ثبت المطلوب من ان تكون مساحة كل قطعة تساوي ما صرح به في رأس الدعوى

نتيجة اذا ففقدت احدى القاعدتين تصير القطعة جسئاً ذات قاعدة واحدة فقط فلذا كان جسم كافي القطع الكروي ذات القاعدة يساوي مجموع نصف الاسطوانة التي تصعد القطعة بمقاعد وارتفاعا والكرة التي قطرها ارتفاع تلك القطعة

(تنبيه عمومي)

اذا كان r نصف قطر قاعدة اسطوانة و c ارتفاعها فمساحة جسمها

$$\text{تكون } \frac{1}{2} \times \pi \times c \times \frac{r}{h}$$

واذا كان r نصف قطر قاعدة مخروط و c ارتفاعه فمساحة جسمه

$$\text{تكون } \frac{1}{2} \times \pi \times \frac{r}{h} \times \frac{1}{3} \times c \times \frac{r}{h}$$

واذا كان a - نصف قطري قاعدة مخروط ناقص و c ارتفاعه فمساحة

$$\text{جسمه } \frac{1}{2} \times \pi \times (a^2 + r^2 + -) \times c$$

واذا كان r نصف قطر كرة فمساحة جسمها $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

واذا كان r نصف قطر قطاع كروي و c ارتفاع المنطقة التي هي قاعدته

فمساحة جسمه تكون $\frac{1}{2} ط س$
 وإذا كان في $و$ قاعدة قطعة كروية $وع$ ارتفاعها فمساحتها
 الجسمية $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) ع \times \frac{1}{4} ع$
 وإذا كانت القطعة الكروية ذات قاعدة واحدة فقط وسميت $ف$ فمساحة
 جسمها $\frac{1}{4} ف ع + \frac{1}{4} ط ع$ وهذا آخره ترجمة

بعد حمد الله على آلائه والصلاة والسلام على خاتم أنبيائه يؤول راجي عقربان
 الأوزار إبراهيم الدسوقي الملقب بعبد الغفار شيخ التصحيح بدار الطباعة أعانه
 الله على مشاق هذه الصناعة

تم بعون الملك الوهاب طبع هذا الكتاب المستطاب طبعة ثالثة مستدركة ما فرط
 فيه من حادثه مقابل على أصله الذي كان طبع عليه من وقت أن ترجمه حضرة
 عصمت أفندي عن التركية إلى العربية مع حضرة أحد دخوجات المدارس على
 أفندي عزت بدون نصرف إلا في مجت الخطوط المتوازية بالطبعة العامة
 الزاهية الزاهرة المتوفرة دواعي مجدها المشرقة كواكب سعدتها في ظل من
 نهطت الأنوار بثنائته وبلغ من كل وصف جميل حد انتمائته ومحاطم الظلم بسنا
 صورته القمرية واثبت مراسم العدل بحسن سيرته العمرية واسبل على أهل
 عاصمته غيث أنعامه وإحسانه وشملهم بعظيم رافته وامتنانه عزيز الديار
 المصرية وحامي حوزتها النبيلة جناب الخديوي ذي القصر الجلي اسمعيل
 ابن إبراهيم بن محمد على أدام الله علينا أيامه ونشر على هام الخافقين أعلامه
 وأطال عمر انجباله الكرام وجرهم بعينه التي لاتنام لاسيما الوزير الشهير
 القليل الأصمیل ذی المجد الأئیل والشرف الجلیل رب المعارف المشهورة
 والعارف المشكورة والرشد والاصابة والدولة والتجاية من هو باحسن
 الثناء حقيق سعادة محمد باشا توفيق أكبر انجال الحضرة الخديوية وولي عهد
 الحكومة المصرية لازالت الايام مضية بشمس علاه واليالي منيرة بيد رحلاه
 وكان طبعه الميمون وسن تمثيله المصون مشهولا بادارة من عليه أحسن اخلافة

تنفى سعادة حسين بك حسنى مدير المطبعة والكادخانة اعلى الله قدره وشانه
 ونظارة وكيله السالك جادة سيده من لم ير لثمرة ذكائه يجنى - حضرة
 محمد أفندي حسنى وملاحظة ذى الرأى المسدد - حضرة أبى
 العينين أفندي أحمد وكان الفراغ من طبعه ونشرته
 فى أوائل ثابى الربيعين من سنة تسع وعشرين وألف
 ومائتين من هجرة بينا عليه الصلاة والسلام
 وعلى آله وأصحابه الكرام ملاح
 بدر تمام وفاح مسك
 ختام آمين

